Einleitung

in die

Mechanik.

Zum

Selbstunterricht

mit Rücksicht auf die Zwecke des practischen Lebens

von

H. B. Lübsen.

„Die Mechanik ist nur ein Spiel der Mathematik."
Archimedes.

Mit 162 Figuren im Text.

Dritte Auflage.

Leipzig.
Friedrich Brandstetter.
1869.

Vorwort.

Zur Herausgabe dieses kleinen Werkes bin ich mehrseitig und besonders von Personen aufgefordert worden, welchen die trigonometrische Sprache nicht geläufig ist. Ich habe sie deshalb auch nur, den wenigen Anfängern zu Gefallen, welche sie verstehen, in Randanmerkungen angewandt. Das sehr kleine Publikum, welches vielleicht die Anwendung der Infinitesimalrechnung gewünscht hätte, muss ich auf andere Werke verweisen. Es allen recht zu machen, schien mir nicht thunlich und habe ich deshalb, um der Mehrzahl zu nützen, nur so viele mathematische Kenntnisse vorausgesetzt, als jetzt in jeder guten Schule gelehrt werden.

HAMBURG, im November 1857.

H. B. Lübsen.

Einleitung.

1.

Archimedes, der erste Begründer der Mechanik, sagt von dieser Wissenschaft: sie sei „nur ein Spiel der Mathematik." Dass dieser Ausspruch des unsterblichen Mannes vollkommen richtig ist, werden wir gleich sehen.

Lassen wir nämlich zu den bereits gewonnenen reinen arithmetischen und geometrischen Begriffen noch die fünf Begriffe: Ruhe, Bewegung, Zeit, Geschwindigkeit und Kraft hinzutreten, so ist damit der bald keimende Saame auf ein ganz neues Feld der Mathematik ausgestreut.

Aus der Combination und mathematischen Bearbeitung dieser Begriffe, nach reinen Denkgesetzen, entspringt nämlich eine neue mathematische Wissenschaft, welche im weitesten Sinne Mechanik genannt wird, indem sie, wegen der erwähnten, in der Arithmetik und Geometrie nicht vorkommenden Erfahrungsbegriffe, eine besondere Wissenschaft für sich bildet, und die, weil wirklich aus der Anwendung der reinen Mathematik entstanden, mit Recht zur angewandten Mathematik (physico-mathématique) gerechnet wird.

2.

Um nun bei der Bildung dieser neuen Wissenschaft von klaren Vorstellungen auszugehen, müssen wir uns zuvor darüber verständigen und deutlich bewusst sein, was wir unter den erwähnten fünf Grundbegriffen verstehen. Denn, obwohl diese Begriffe zu den einfachen gehören, die jeder Mensch hat, so ist dennoch zur Vorbereitung und um das eigentliche Wesen

und den Zweck der Mechanik, worauf unsere Forschungen gerichtet sein müssen, etwas deutlicher bezeichnen und dadurch dem Anfänger ein sichtbares Ziel ausstecken zu können, eine besondere Hervorhebung und mathematische Festsetzung derselben nothwendig. Daher:

I. Grundbegriffe.

3.

Ruhe. Ein Körper ist in Ruhe, wenn jeder Punct desselben sich immer an einem und demselben Ort des (ebenfalls ruhend gedachten) unendlichen Raumes befindet.

4.

Bewegung. Ein Körper ist in Bewegung, wenn er selbst oder auch nur einige seiner Puncte in andere Theile des Raumes übergehen. (Eine Kugel, die sich um eine festliegende Achse dreht, und also selbst nicht aus der Stelle kommt, ist dennoch in Bewegung.)

Anmerkung. Wenn auch Alles in der Natur in steter Bewegung ist und sogar die Atome in den Körpern beständig zittern, mithin keine absolute Ruhe, so wie § 3 festgesetzt, in der Natur existirt, so kann man sich dieselbe doch denken.

5.

Zeit. Die drei Begriffe: Ruhe, Bewegung und Zeit sind durchaus mit einander verbunden. Wer den einen nicht hat, hat die beiden andern auch nicht. Wohl aber mag von diesen Drillingen die Vorstellung der Bewegung die Erstgeborne sein. Ein Körper kann von einem Orte des Raumes zu einem andern übergehen. Dies kann aber nicht in einem Nu geschehen, weil er nicht in beiden Orten zugleich sein kann. Es muss darüber ein gewisses Intervall (Zeit genannt) verfliessen. Diese Vorstellung dringt sich von selbst auf.

6.

Geschwindigkeit. Dieser Begriff entspringt aus zwei Vorstellungen: aus der Länge des Weges, den ein sich bewegender Körper durchläuft, und der Zeit, welche darüber verfliesst. Wenn nämlich von zwei sich bewegenden Körpern

der eine in derselben Zeit einen längern Weg durchläuft, als der andere, so sagen wir: ersterer Körper bewege sich rascher, schneller, geschwinder etc. und legen deshalb beiden Körpern ein an Grösse verschiedenes Bewegungsbestreben bei. Die (intensive) Grösse dieses Bewegungsbestrebens (Geschwindigkeit) lässt sich aber nicht unmittelbar, sondern nur mittelbar messen, indem wir die Längen der Wege mit einander vergleichen, welche Körper von verschiedener Geschwindigkeit in derselben Zeit durchlaufen. Wir sagen nämlich: ein Körper hat eine 2, 3...m mal so grosse Geschwindigkeit als ein anderer, wenn er in derselben Zeit einen 2, 3...m mal so grossen Weg durchläuft. Durchläuft z. B. ein Punct in einer Secunde einen Weg von 40 Fuss, ein anderer in derselben Zeit einen Weg von 120 Fuss, so ergiebt sich aus der Vergleichung dieser Wege, dass die Geschwindigkeit des zweiten Punctes dreimal so gross ist, als die des erstern.

Indem wir also die Geschwindigkeiten verschiedener Körper den gleichzeitig durchlaufenen Wegen (gleichsam die Ursachen den Wirkungen) proportional setzen, können wir die relativen Grössen verschiedener Geschwindigkeiten mittelbar messen und in Zahlen ausdrücken. Man ist deshalb übereingekommen, bei jeder Bewegung den in einer bestimmten Zeiteinheit, nämlich in einer Secunde, durchlaufenen Weg, als das Maass der zugehörigen Geschwindigkeit zu nehmen. Als Zeiteinheit hat man in der Mechanik allgemein deshalb eine Secunde gewählt, weil eine kleinere Einheit sich nicht so bequem mehr messen lässt und eine grössere Einheit auf zu grosse Zahlen führen würde. So ist z. B. die Geschwindigkeit des Lichts = 41000 Meilen. Diesen Weg durchläuft das Licht also in einer Secunde.*)

*) Es drängt sich hier leicht die Vorstellung auf, dass ein in Bewegung befindlicher Körper sich bald schneller, bald langsamer bewegen, mithin seine Geschwindigkeit veränderlich sein kann. Wir müssen diese Vorstellung aber vorläufig wieder zurückdrängen, indem wir nicht alle auf einmal bearbeiten können. Um einen völlig bestimmten Begriff zu haben, müssen wir uns die Geschwindigkeit eines Körpers als unveränderlich (constant) denken, so dass derselbe von jedem Orte seiner Bahn aus in gleichen Zeiten gleich lange Wege durchläuft, oder was dasselbe ist, die Länge des Weges der Zeit genau proportional wächst, also in m mal so viel Secunden auch einen m mal so langen Weg.

7.

Kraft. Wenn ein Körper seinen Zustand, sei es der Ruhe oder der Bewegung, ändert, z. B. aus dem Zustand der Ruhe in Bewegung übergeht, so nöthigt uns jedenfalls die Erfahrung, anzunehmen, dass kein willensloser Körper von selbst seinen Zustand ändern könne, sondern dies irgend eine, wenn auch nicht wahrnehmbare Ursache (Ursachen) gethan haben müsse.*)

Jede Ursache nun, welche den Zustand der Ruhe oder Bewegung eines Körpers abändert, benennt man mit dem allgemeinen dunklen Worte: Kraft. Dies ist also bloss eine Benennung eines unbekannten Etwas. Denn was eigentlich Kraft ist (das Ding an sich), wissen wir nicht. Wir kennen das eigentliche Wesen der Kräfte nicht, in vielen Fällen nicht mal die eigentliche Art und Weise, wie sie wirken. Wir kennen z. B. von dem das Eisen bewegenden Magneten weder die mystische Natur seiner Kraft, noch die Art und Weise, wie er das Eisen bewegt, ob er es mit unsichtbaren Fäden an sich zieht, ob er es an sich lockt, oder wie? — Glücklicherweise braucht aber die Mechanik zu ihrer wissenschaftlichen Begründung das Wesen der Kräfte gar nicht zu kennen. Ihr genügt die Kenntniss der relativen Grössen (Intensitäten) derselben und diese verschafft sie sich mittelbar, durch Vergleichung der hervorgebrachten Wirkungen.

Hinsichtlich der verschiedenen Arten der Kräfte unterscheidet die reine (theoretische, rationale) Mechanik nur dreierlei, nämlich: Druck-, Zieh- und Stosskraft. Die angewandte Mechanik unterscheidet freilich vielerlei Arten Kräfte oder eigentlich deren Träger, z. B. die Kraft des Windes, des Wassers, des Dampfes, des Pulvers, Muskelkraft, Federkraft, electrische, magnetische Kraft etc. Alle diese besondern Kräfte kann aber die reine Mechanik unter den eben erwähnten drei: Druck-, Zieh- und Stosskraft zusammen fassen, indem jede Kraft, welchen Namen sie auch haben mag, doch auf eine dieser drei Arten sich äussern muss.

*) Eine Kugel, die auf einem horizontalen Brette im Zustande der Bewegung ist, kommt nach und nach in den Zustand der Ruhe, aber keineswegs von selbst, wie es manchem scheinen mag. Es sind, wie wir später sehen werden, wirklich Ursachen (Reibung, Widerstand der Luft) vorhanden, welche diesen veränderten Zustand bewirken.

8.

Es wird zum leichtern Verständniss des Folgenden dienen, hier zugleich das Mittel zu erwähnen, durch dessen Hülfe die angewandte Mechanik mittelst Gewichte*) die Druck- und Ziehkräfte messen, durch Zahlen sich von ihrer relativen Grösse eine bestimmte Vorstellung machen und sie mit einander vergleichen kann.

Angenommen: es sei irgend eine Kraft durch Ziehen oder Drücken im Stande, einen ruhenden Körper, den sie im Puncte A oder B angreift und nach der Richtung $\overline{AB}$ wirkend, abzubrechen oder bis auf einen gewissen Grad zu biegen etc., so können wir uns statt dieser Kraft, welche sie auch sein möge (z. B. der Zug eines Pferdes, Druck einer elastischen Feder etc.), immer ein Gewicht denken, welches, in demselben Puncte angreifend und nach derselben Richtung ziehend, ganz dieselbe Wirkung hervorbringt. Denn obgleich die unmittelbare Richtung der Kraft eines Gewichts stets vertical ist, so sieht man doch, dass diese verticale Richtung mittelst einer Schnur, die über eine gehörig angebrachte Leitrolle läuft, in jede andere, selbst in eine gerade entgegengesetzte Richtung umgelenkt werden kann.

Da nun die Mechanik nicht das eigentliche Wesen der Kräfte, sondern nur ihre relativen Grössen (Stärke, Intensitäten) zu kennen braucht, so kann man Druck- und Zugkräfte, wenn sie auch ganz verschiedener Natur sind, dennoch in rein mechanischer Hinsicht, als gleich gross ansehen, wenn sie gleiche Wirkungen hervorbringen und also zu ihrem Maasse gleiche Gewichte erfordern, und ebenso auch eine Druck- oder Ziehkraft, welche zu ihrem Maasse 2, 3...m mal so viel Gewicht erfordert, als eine andere, auch eine 2, 3...m mal so grosse Kraft nennen.

Weil sich nun für die Wirkungen aller Druck- und Zugkräfte Gewichte als deren Maasse setzen lassen, so ist klar, dass man durch dieses einfache Mittel sie alle messen, durch Zahlen darstellen und sie, ihrer relativen Grösse nach, mit einander vergleichen kann. Stosskräfte aber lassen sich nicht durch Gewichte messen, davon gehörigen Orts in der Dynamik.

*) Obgleich der Begriff Gewicht ein mechanischer ist und auch gehörigen Orts erklärt werden soll, so genügt doch hier zur Einleitung die gewöhnliche rohe Vorstellung desselben vollkommen. Die Annahme abstracter Kräfte hat für den Anfänger etwas Anstössiges.

II. Eintheilung und Zweck der Mechanik.

9.

Wenn mehre Kräfte auf einen freien, ruhenden Körper wirken, so können folgende zwei Fälle Statt finden: Entweder wird 1) der Körper dadurch bewegt, oder 2) er wird sich nicht bewegen. Beide Fälle hängen, wie wohl leicht vorauszusehen und was wir genau untersuchen müssen, von drei darüber entscheidenden Umständen ab, nämlich: von der Grösse der Kräfte, von ihren Richtungen und von der Lage der Angriffspuncte. Diese beiden Fälle geben indess Anlass, die ganze Mechanik in zwei verschiedene Felder zu theilen:

Modificiren sich die auf den Körper wirkenden Kräfte so unter einander, dass keine Bewegung erfolgt, der Körper also in Ruhe oder sein Zustand derselbe bleibt, als wenn die Kräfte gar nicht auf ihn wirkten, so sagt man in der Kunstsprache: die Kräfte seien im Gleichgewicht oder auch der Körper sei im Gleichgewicht und nennt denjenigen Theil der Mechanik, welcher die zum Gleichgewicht erforderlichen Bedingungen (die Grössen der Kräfte, ihre Richtungen und Lage ihrer Angriffspuncte) bestimmen lehrt, die Statik (stare, stehen, ruhen); den andern Theil dagegen, welcher die Art der Bewegung bestimmen lehrt, die ein nicht im Gleichgewicht befindlicher Körper nehmen muss (z. B. ob in grader oder krummer Linie, mit welcher Geschwindigkeit, welche Wirkung er auf einen andern Körper, den er auf seiner Bahn trifft, ausübt etc.), die Dynamik (dynamis, Kraft).

10.

Dass die Lehre vom Gleichgewicht (die Statik) einfacher und leichter, als die Lehre von der Bewegung (die Dynamik) sein wird, weil in ersterer die Begriffe: Bewegung, Zeit und Geschwindigkeit überall nicht vorkommen, lässt sich ahnen, und da die Wissenschaft dahin gelangt ist, fast alle Fragen über die Bewegung der Körper auf die des Gleichgewichts zurückzuführen, so ist durch diese neuere Eintheilung der Mechanik in zwei besondere Wissenschaften offenbar an Ordnung und Klarheit gewonnen.

11.

Da wir jedoch in der uns umgebenden Natur dreierlei Arten Körper unterscheiden, nämlich: feste, tropfbar flüssige und luftförmige und eine vollständige Mechanik die Lehren über das Gleichgewicht und die Bewegung aller drei Arten Körper enthalten muss, letztere beiden aber, wegen ihrer besondern merkwürdigen physischen Eigenschaften, wodurch sie sich unter einander und von den festen Körpern unterscheiden, ganz besonders betrachtet werden müssen, so ist dadurch eine nothwendige Weitereintheilung entstanden. Die ganze Mechanik zerfällt nämlich in folgende sechs verschiedene Theile:

1. **Statik, Gleichgewicht** } **fester Körper.**
2. **Dynamik, Bewegung** }
3. **Hydrostatik, Gleichgewicht** } **tropfbar flüssiger Körper.**
4. **Hydrodynamik, Bewegung** }
5. **Aërostatik, Gleichgewicht** } **luftförmiger Körper.**
6. **Aërodynamik, Bewegung** }

Ausserdem unterscheidet man noch niedere und höhere Mechanik, je nachdem zur Lösung ihrer Probleme die Kenntniss der niedern Mathematik ausreicht oder die der Infinitesimalrechnung erforderlich ist.

12.

Jeder der aufgeführten sechs Theile der Mechanik beruht auf ihm eigenthümlichen Grundsätzen, und wir wollen nun die der Statik fester Körper, mit welcher wir zuerst beginnen, hier aufstellen, müssen aber hierbei ein für allemal bemerken, dass wir bei der Entwickelung der reinen statischen Lehren die festen Körper, auf welche wir Kräfte wirken lassen, vorläufig ohne ihre physischen Eigenschaften (wie Biegsamkeit, Elasticität, Reibung, Schwere etc.), mithin auch ganz gewichtslos, kurz uns nur deren, als durchaus unveränderliche, absolut fest vorausgesetzten Formen denken, deren sämmtliche Puncte und namentlich die Angriffspuncte durch Einwirkung der Kräfte ihre Lage nicht im Geringsten ändern können. Erst nachdem wir die Gesetze der Statik für solche ideale Körper gefunden, können wir dieselben auf wirkliche Naturkörper anwenden, indem wir dabei dann ihre physischen Eigenschaften (wie Schwere, Reibung, Elasticität etc.) berücksichtigen und als besondere Kräfte in die Rechnung mit

einführen. Und, obgleich wir zur grössern Erläuterung der Theorie durch Beispiele, manchmal statt abstracter Kräfte bestimmte Gewichte substituiren werden, so müssen wir hier doch noch bemerken, dass in der reinen (rationellen) Statik nie von bestimmten Kräften (wie Dampfkraft etc.), sondern nur ganz allgemein von Kräften die Rede sein wird, die wir uns immer als drückend oder ziehend denken und deren Grösse wir, entweder durch unbenannte Zahlen, oder zuweilen auch durch ihnen proportionirte Linien darstellen werden, die wir nach einem beliebig gewählten Maassstab, von ihren Angriffspuncten aus, auf ihre Richtungen abtragen oder abgetragen denken.

III. Grundsätze.

13.

Unter Grundsätze der Mechanik versteht man solche Sätze, worauf die ganze Wissenschaft gegründet wird und die als ursprüngliche, für sich einleuchtende Sätze, nicht wie Lehrsätze (z. B. der Pythagoräische) aus andern Gründen hergeleitet, jedenfalls nicht anders als durch den Satz des zureichenden Grundes bewiesen werden können, die jedoch hier so einfach, klar und natürlich sind, dass der gemeine Menschenverstand, sobald er sie nur aussprechen hört, sie auch sogleich einsieht und willig zugiebt und die übrigens auch durch die Erfahrung bestätigt sind. Wir haben uns hier folgende wohl zu merken, um uns später darauf berufen zu können.

14.



Zwei gleiche, grade entgegengesetzte, an einem Punct C oder an den Endpuncten einer graden Linie AB wirkende Kräfte + P, — P, sind im Gleichgewicht (heben sich auf, tilgen sich).

Denn es ist kein Grund vorhanden, weshalb der an sich ganz frei gedachte Punct*) oder die Linie sich eher nach der einen, als nach der andern Seite bewegen sollte.

---

*) Wer die Anbringung von Kräften an einem (idealen) Punct oder Linie anstössig finden sollte, möge sich, wie schon die Figur andeutet,

15.

Wenn eine Kraft P senkrecht auf eine feste Ebene wirkt, so wird durch den Widerstand der festen Ebene die Kraft im Gleichgewicht erhalten, weil kein Grund vorhanden, dass eine Bewegung eher nach der einen, als nach der andern Richtung Statt finden sollte.

16.



Der Angriffspunct einer Kraft kann nach jedem beliebigen Puncte in ihrer Richtung verlegt und die Kraft daselbst angebracht werden, wenn nur der neue Angriffspunct mit dem alten auf irgend eine Weise fest verbunden ist. Dieser Satz lässt sich auch als Lehrsatz aus dem vorhergehenden ableiten, Denn sei A der Angriffspunct einer nach der Richtung A C wirkenden Kraft + P. Nimmt man nun in derselben Richtung einen neuen Angriffspunct B, und denkt sich daselbst zwei gleiche Kräfte + P, — P angebracht, wovon die eine + P nach der Richtung $\overline{BC}$, die andere — P nach der grade entgegengesetzten Richtung $\overline{BA}$ wirkt, so kann man offenbar die beiden in den Endpuncten der Linie A B entgegengesetzt wirkenden Kräfte — P, + P (weil sie sich tilgen § 14) weglassen und es bleibt in B noch die dahin versetzte Kraft + P wirksam.

17.

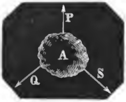


Wenn mehre Kräfte S, P, Q in derselben graden Linie in verschiedenen Angriffspuncten A, B, C auf einen Körper wirken, so kann man zufolge § 16 die verschiedenen Angriffspuncte nach einem beliebigen Punct in derselben Richtung z. B. nach A versetzt denken, und in diesem Puncte die algebraische Summe der Kräfte S + P + Q wirken lassen.

---

den Punct (Linie) an einem Körper denken, dann aber dessen physische Eigenschaften wegdenken.

18.



Wenn mehre auf einen Punct, Linie oder Körper wirkende Kräfte im Gleichgewicht sind, so hält jede von ihnen allen übrigen das Gleichgewicht.

Es seien z. B. am Körper A die drei Kräfte P, Q, S im Gleichgewicht. Denkt man sich die beiden Kräfte Q und S vernichtet, so wäre kein Gleichgewicht mehr, und der Körper würde dem Zuge der Kraft P folgen. Folglich halten die beiden Kräfte Q und S der Kraft P das Gleichgewicht; aber auch umgekehrt, hält die Kraft P den beiden Kräften Q und S das Gleichgewicht, denn liesse man von den drei im Gleichgewicht gedachten Kräften die Kraft P weg, so würde sich offenbar der Körper in der der Kraft P grade entgegengesetzten Richtung bewegen, da nun dieses die Kraft P verhütet, so ist klar, dass die Kraft P den beiden Kräften Q und S das Gleichgewicht hält. Eben so hält auch die Kraft Q den beiden Kräften P und S das Gleichgewicht etc.

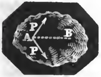
19.

Erklärung. Eine Kraft, welche dieselbe Wirkung hervorbringt wie mehre andere, und sich also statt derselben substituiren lässt, heisst die Resultante derselben, diese dagegen die Composanten der Resultante. Sind z. B. drei Kräfte P, Q, S im Gleichgewicht, so kann man sich, weil Q und S der Kraft P das Gleichgewicht halten, offenbar auch statt der beiden Kräfte Q und S auch eine einzige R denken, welche dieselbe Wirkung hervorbringt und diese Kraft R (hier an Grösse der Kraft P gleich aber entgegengesetzt) ist also die Resultante von Q und S, und umgekehrt, sind Q und S die Composanten von R. Wir können demnach den vorhergehenden Satz auch so aussprechen: Wenn ein System von Kräften im Gleichgewicht ist, so ist jede einzelne gleich und entgegengesetzt der Resultante der übrigen. Wir dürfen also auch immer die Resultante statt ihrer Composanten und umgekehrt substituiren.

Der Anfänger muss sich hüten, die Resultante mehrerer Kräfte mit deren Summe zu verwechseln. In § 17, wo die

drei Kräfte P, Q, S nach einerlei Richtung wirken, ist es freilich der Fall, dort ist die Resultante $R = P + Q + S$. Wirken an einem Punct zwei Kräfte z. B. 40 ℔ und 30 ℔ nach entgegengesetzter Richtung, so ist ihre Resultante $R = 40 - 30 = 10$ ℔, und wären beide entgegengesetzte Kräfte gleich gross, so ist ihre Resultante $R = 0$.

20.



Wenn zwei vollkommen **gleiche** Kräfte P, P unter einem beliebigen Winkel auf einen Punct A wirken, so muss die **Richtung** ihrer (an Grösse noch unbekannten) Resultante R in der Ebene des Winkels liegen und denselben halbiren, weil kein Grund vorhanden, weshalb die Richtung der Resultante eher diesseits als jenseits der Ebene liegen, und eben so wenig ein Grund vorhanden ist, weshalb ihre Richtung sich der einen der beiden gleichen Composanten mehr als der andern nähern sollte. —

Zusatz. Da der Angriffspunct A der Resultante in jedem beliebigen Punct B in ihrer Richtung angenommen werden darf (§ 16), so ist auch klar, dass man in diesem Puncte B statt der Resultante wieder ihre Composanten wirken lassen kann, oder was dasselbe ist: man kann die beiden Composanten immer **parallel** mit sich selbst nach jedem beliebigen neuen Angriffspunct B in der Richtung ihrer Resultante versetzen.

21

Nach Vorausschickung dieser Grundsätze können wir nun auch den besondern Zweck der Statik etwas bestimmter, als es bisher möglich war, andeuten:

Die Statik als die Wissenschaft vom Gleichgewicht fester Körper, hat die allgemeinen Beziehungen (Bedingungen, Gleichungen) zu entdecken, welche unter den **Grössen**, **Richtungen** und **Lage** der Angriffspuncte eines im Gleichgewicht befindlichen Systems von Kräften Statt finden müssen. Die besondern Arten Probleme, welche sie zu lösen hat, kommen auf folgende zwei zurück:

1) Es sind mehre auf einen Körper (Punct, Linie) wirkende Kräfte (der Grösse, Richtung und Lage nach)

gegeben, es soll die daraus entspringende Resultante gefunden werden.

2) Es ist umgekehrt eine Kraft gegeben, und man soll dieselbe in andere zerlegen, die man als ihre Composanten betrachten und statt der gegebenen Kraft substituiren kann, oder was dasselbe ist: es ist eine Kraft gegeben, die auf ein System fest verbundener Puncte wirkt, und es soll die Wirkung der gegebenen Kraft auf einzelne dieser Puncte bestimmt werden.

Dass diese Aufgaben, wie schon Archimedes behauptete, mathematischer Natur sind, und ihre Lösung sowohl die Arithmetik als die Geometrie nothwendig zu Hülfe rufen muss, geht schon aus dem Ausspruch derselben hervor. Bei ihrer Lösung stützen wir uns immer auf die vorausgeschickten Grundsätze. Wer diese allgemein geltend zugiebt, ist logisch verpflichtet, auch alle daraus fliessenden Folgerungen zuzugeben, und nun zur Sache.

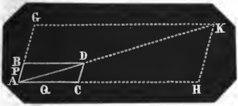
I. Theil.

Statik fester Körper.

Erstes Buch.

Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte, welche auf einen Punct wirken.

22.



Lehrsatz. Wenn zwei Kräfte $AB = P$ und $AC = Q$ unter einem beliebigen Winkel auf einen beweglichen Punct A wirken, so stellt die Diagonale AD des über diesen Kräften construirten Parallelogramms sowohl die Richtung als auch die Grösse der entspringenden Resultante R dar.*)

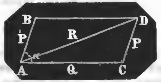
*) Es giebt für diesen merkwürdigen und wichtigen Satz verschiedene Beweise. Der hier gegebene, der sich auch bei Galiläi und Newton, die am meisten in der Mechanik geleistet haben, findet, ist der ursprüngliche, natürlichste, sich von selbst aufdringende. Von den übrigen Beweisen, die alle sehr gekünstelt und weitläufig sind, ist noch einer in § 117 angeführt.

Beweis. Es sei A G der Weg, welchen der bewegliche Punct A in einer beliebigen Zeit durchlaufen haben würde, wenn die Kraft A B = P allein gewirkt hätte und ebenso A H der Weg, welchen der Punct A in derselben Zeit durchlaufen haben würde, wenn die Kraft A C = Q allein gewirkt hätte, so müssen sich offenbar die Längen dieser Wege wie die Kräfte verhalten, A G : A H = P : Q. Wäre z. B. Q dreimal so gross als P, so wäre auch der Weg A H dreimal so lang als A G.

Man denke sich nun beide unveränderliche Kräfte gleichzeitig wirkend (Q sei z. B. die Kraft des Stromes, welche eine Rinne A G, parallel mit sich selbst, in einer gewissen Zeit nach H K versetzt und P die Kraft des Windes, welche einen Körper A in dieser Rinne in derselben Zeit von A nach G bringt), so wird auch, wenn z. B. Q = 3 P ist, der Fortschritt des beweglichen Punctes A nach der mit A H parallelen Richtung stets dreimal so gross sein, als nach der mit A G parallelen Richtung, und der Punct A deshalb sich nothwendig stets in der Diagonale A K des Parallelogramms bewegend, nach Verfluss derselben Zeit in K sein.

So viel mal nun die durchlaufene Diagonale A K grösser ist als z. B. der Weg A G, so viel mal muss die Kraft R (Resultante von P und Q), welche erstere Wirkung hervorgebracht hat, grösser als P sein. In Zeichen: R : P = A K : A G, oder auch: R : Q = A K : A H. Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke ist nun aber A D : A B = A K : A G und folglich stellt (nach demselben Maassstab gemessen, nach welchem die Composanten A B = P, A C = Q aufgetragen sind) die Diagonale A D des über die Kräfte A B und A C construirten sogenannten Kräftenparallelogramms, sowohl die Richtung, als auch die Grösse der fraglichen Resultante R dar. (S. § 117.)

23.



Man kann die respectiven Grössen der drei Kräfte P, Q, R des Kräftenparallelogramms durch die drei Seiten des Dreiecks A C D darstellen, (weil C D = A B) und man sieht hieraus leicht, dass die Resultante R immer kleiner ist, als die Summe der beiden Composanten (Geometrie § 52). Ferner: je kleiner der

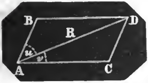
Winkel α ist, den die Composanten P, Q mit einander bilden, je grösser ist die Resultante R und umgekehrt, je grösser der Winkel α, je kleiner die Resultante. Wäre $\alpha = 90^0$, so wäre $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$.

24.

Aufgabe. Zwei Kräfte P = 200 ℔, Q = 500 ℔ wirken unter einem Winkel $\alpha = 70^0$ auf einen Punct A. Wie gross ist die Resultante?

Auflösung durch Construction. Mit Hülfe des Winkelmessers zeichne man erst möglichst genau den Winkel $\alpha = 70^0$. Trägt man nun vom Scheitel A aus nach einem beliebigen verjüngten Maassstab, die gegebenen Kräfte auf dessen Schenkel ab, AB = 200, AC = 500, construirt das Parallelogramm, zieht vom Angriffspunct A aus die Diagonale AD, so giebt diese, nach demselben Maassstab gemessen, die Resultante für manche Zwecke genau genug.*)

25.



Aufgabe. Um einen Stützpunct A zu halten, sei nach der Richtung AD wirkend eine Kraft R = 1000 erforderlich. Wegen eines Hindernisses sei es aber nicht möglich, nach dieser Richtung die Kraft R wirken zu lassen, dagegen aber stehen die beiden durch die Winkel u und v gegebenen Richtungen AB, AC frei. Man frägt, wie gross die nach diesen Richtungen wirkenden Kräfte P und Q genommen werden müssen, damit sie die beabsichtigte Wirkung auf den Punct A hervorbringen, mit andern Worten: Es soll eine der Grösse und Richtung nach gegebene Kraft R = AD in zwei Composanten zerlegt

*) Weil Winkel $C = 180 - \alpha$, und $\cos(180 - \alpha) = -\cos\alpha$, so hat man schärfer und allgemein (Trigon. § 38):

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$$
$$R = 598{,}6.$$

werden, deren Richtungen durch die Winkel *u* und *v* gegeben sind. *)

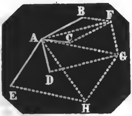
Auflösung durch Construction. Man nehme auf der Richtung der Kraft R die Linie AD = 1000, ziehe durch D die mit den andern Schenkeln der Winkel *u* und *v* Parallelen DB und DC, so stellen die darauf abgeschnittenen Stücke AB und AC die gesuchten Composanten P und Q dar.

26.

Aufgabe. Auf den Punct A soll nach der Richtung AD eine Kraft R = 1000 wirken. Diese Kraft R steht nicht zur Verfügung, dagegen aber zwei andere Kräfte P = 600 und Q = 800. Wie müssen diese Kräfte gegen AD gerichtet sein, damit sie die beabsichtigte Wirkung R hervorbringen?

Auflösung durch Construction. Man nehme AD = R = 1000, beschreibe aus A und D mit AC = 800 und DC = 600 zwei sich in C schneidende Bögen, ziehe dann aus D eine Parallele mit AC, und aus A eine Parallele mit CD, welche beide sich in B schneiden, alsdann sind AB und AC die gesuchten Richtungen der gegebenen Composanten P und Q. **)

27.



Aufgabe. Die Resultante beliebig vieler, auf einen Punct A wirkenden, der Grösse und Richtung nach durch die Linien AB, AC, AD... dargestellten Kräfte durch Construction zu finden.

Auflösung. Man findet die Resultante, indem man sie nach und nach von je zweien Kräften sucht. So kann man z. B. AF statt AB und AC, dann wieder AG statt AF und AD setzen etc.

---

*) Es ist allgemein (Trigon. § 27):

$$P = \frac{\sin v}{\sin (u+v)} . R$$

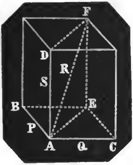
$$Q = \frac{\sin u}{\sin (u+v)} . R$$

**) Man hat hier zur Bestimmung der Winkel *u*, *v* (Trigonometrie § 33 oder § 35):

$$\cos u = \frac{R^2 + P^2 - Q^2}{2PR}$$

$$\cos v = \frac{R^2 + Q^2 - P^2}{2QR}$$

28.



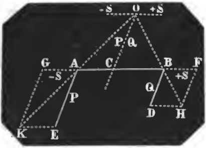
* Gleich wie man von einem Kräftenparallelogramm spricht, so kommt auch wohl das Kunstwort Kräftenparallelopiped vor. Wirken nämlich drei Kräfte AB = P, AC = Q und AD = S nicht in einer Ebene auf einen Punct A, so folgt aus § 27, dass die Diagonale AF des über diesen drei Kräften construirten Parallelopipeds die Resultante R darstellt. Wirken die Kräfte P, Q, S senkrecht aufeinander, so wäre:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + S^2}.$$

Zweites Buch.

Zusammensetzung und Zerlegung paralleler Kräfte.

29.



Lehrsatz. Die Resultante R zweier an den Endpuncten einer graden Linie AB und einerlei Sinnes wirkenden parallelen Kräfte, P und Q, ist gleich ihrer Summe, parallel mit denselben, und der Angriffspunct C der Resultante theilt die Linie so, dass sich die beiden Theile umgekehrt wie die daran wirkenden Kräfte verhalten.

Beweis. Sei A E = P und B D = Q. An den Enden der graden Linie A B denke man sich zwei gleich gerade entgegengesetzte Kräfte BF = + S, A G = — S angebracht, so ist dadurch in der Wirkung der beiden Kräfte P und Q eben so wenig etwas geändert, als wenn man, um einen geometrischen Lehrsatz zu beweisen, in der Figur Hülfslinien zieht (§ 14).

Statt der zwei Paar Kräfte P, — S und Q, S kann man ihre Resultanten A K = V und B H = W substituiren, dann

die Angriffspuncte A und B dieser Resultanten nach dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunct O ihrer Richtungen versetzen (§ 16).*) Die nun in O wirkenden Kräfte zerlege man wieder in ihre Composanten P, — S und Q, S. (§ 20, Zus.) Die beiden in O entgegengesetzt wirkenden Kräfte + S, — S kann man wieder weglassen; dann wirkt in O noch die Summe der beiden Kräfte P und Q und parallel mit AE, daher $R \parallel P + Q$. Den Angriffspunct O der Resultante kann man in ihrer Richtung nach dem Punct C in AB verlegen. Da nun $\triangle OCA \sim \triangle AEK$ und ebenso $\triangle OCB \sim \triangle BDH$ und $KE = DH = S$, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{OC}{AC} &= \frac{AE}{KE} \\ \frac{BC}{OC} &= \frac{HD}{BD} \end{aligned}\right\} \text{ oder: } \begin{aligned} \frac{OC}{AC} &= \frac{P}{S} \ldots\ldots (1) \\ \frac{BC}{OC} &= \frac{S}{Q} \ldots\ldots (2) \end{aligned}$$

Multiplicirt man die beiden letzten Gleichungen (1) und (2) mit einander, so ist auch, wie im Lehrsatz behauptet:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{P}{Q} \text{ oder:}$$
$$AC : BC = Q : P.$$

30.

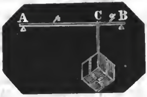
Aufgabe. An den Enden einer graden Linie $AB = a = 12'$, wirken nach derselben Seite zwei parallele Kräfte $P = 160$ in A und $Q = 80$ in B. Wie gross ist die Resultante R und wie weit ist ihr Angriffspunct C von A entfernt?

Auflösung. Es ist zuerst: $R = P + Q = 240$. Dann hat man $AC = x$, mithin $BC = a - x$ gesetzt:

$$x : a - x = Q : P, \text{ hieraus:}$$
$$x = \frac{Q}{P+Q} \cdot a$$
$$x = 4'.$$

*) Der Anfänger möge sich die Linie AB an einem Körper denken, in welchen noch der Punct O fällt. (§ 14, Bdmkg.)

31.



Aufgabe. An einer horizontalen, aber noch gewichtslos gedachten Stange wirkt in C nach verticaler Richtung eine Last R = 200 ℔. Wie viel haben die Stützpuncte A und B zu tragen, wenn AC = $p = 6'$ und $BC = q = 2'$.

Auflösung. Hier muss die Last R in zwei mit ihr parallelen Composanten zerlegt werden, deren Summe offenbar = R ist. Ist also der Druck, den der Stützpunct A auszuhalten hat $= x$, mithin der Druck auf den Punct B, $= R - x$, so muss sein:

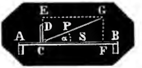
$$x : R - x = q : p, \text{ hieraus:}$$

$$x = \frac{q}{p+q} \cdot R$$

$$R - x = \frac{p}{p+q} \cdot R.$$

Für das angenommene Zahlenbeispiel wäre $x = 50$ ℔ und $R - x = 150$ ℔.

32.



Aufgabe. Eine Kraft P = 1000 ℔ drückt (z. B. vermittelst einer graden Stange) unter einem Winkel $\alpha = 30^0$ auf eine feste Ebene (Balken) AB. Welchen Druck haben die Stützpuncte A und B, und welchen Druck die in C mit AB fest verbundene senkrechte Ebene CD auszuhalten, wenn $AC = 2'$, $BC = 8'$ ist?

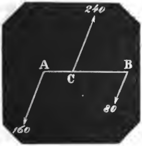
Auflösung. Stellt die Linie GC die schräg gegen die Ebene gerichtete Kraft P dar, so kann man statt derselben die beiden Composanten FC = S parallel mit der Ebene AB und EC = D senkrecht darauf substituiren und es ist dann,*) wenn $\alpha = 30^0$, wie leicht einzusehen $GF = EC = D = \frac{1}{2} P = 500$ ℔., und $FC = S = \sqrt{1000^2 - 500^2} = 866$ ℔. (nahe).

---

*) Es ist allgemein: $S = P \cos \alpha$ und $D = P \sin \alpha$.

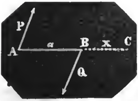
Die Kraft S = 866 ℔ drückt rechtwinklig auf die Ebene CD und würde also den damit verbundenen Balken AB, wenn er nicht an den Stützpuncten befestigt wäre, darüber fortschieben. Die andere Kraft D = 500 ℔ drückt senkrecht auf den Balken AB und dieser Druck vertheilt sich auf die beiden Stützpuncte A und B so, dass (§ 31) A mit 400 ℔ und B nur mit 100 ℔ gedrückt wird.

33.



Wirken in den Endpuncten einer graden Linie, AB, zwei parallele Kräfte, z. B. 160 und 80, nach derselben Seite hin, so muss, wenn man in dem Angriffspunct der Resultante eine ihr gleiche Kraft, nämlich 240, nach grade entgegengesetzter Richtung wirken lässt, Gleichgewicht hergestellt sein. Liesse man jetzt die Kraft 80 weg, so würde der Punct B offenbar nach entgegengesetzter Richtung gedrückt werden und zwar mit einer Kraft = 240 — 160 = 80 und welche also die Resultante von den beiden parallelen und entgegengesetzten Kräften 240 und 160 ist (§§ 18, 19). Aus demselben Grunde muss auch die Resultante von den beiden entgegengesetzten Kräften 240 und 80 gleich und entgegengesetzt der Kraft 160 sein. Man sieht also, dass auch zwei an den Enden einer graden Linie AC parallelen und entgegengesetzten Sinnes wirkenden Kräfte eine Resultante haben. Diesen Fall, der, wenn die Kräfte gleich sind, auf einen merkwürdigen Ausnahmefall führt, wollen wir im folgenden Paragraphen näher betrachten.

34.



Aufgabe. An den Enden einer graden Linie AB = a = 10′ wirken zwei parallele, aber entgegengesetzte Kräfte P = 100 ℔ und Q = 150 ℔. Man soll die Resultante R und die Entfernung ihres Angriffspuncts C von B, nämlich BC = x bestimmen.

Auflösung. Denkt man sich die Resultante, welche nach § 33, $= Q - P = 50$ ℔. ist, in umgekehrter Richtung wirkend,*) so würde offenbar Gleichgewicht Statt finden, wenn der Angriffspunct C so weit von B entfernt wäre, dass:

$$a : x = Q - P : P, \text{ woraus:}$$
$$x = \frac{P}{Q - P} \cdot a.$$

Für unser Zahlenbeispiel wäre also $x = \frac{100}{50} \cdot 10 = 20'$. Wäre dagegen wieder $P = 100$ aber $Q = 101$, so wäre $x = \frac{100}{1} \cdot 10 = 1000'$, und wäre $P = 100$ und $Q = 100\frac{1}{1000}$, so wäre $R = \frac{1}{1000}$ und $x = \frac{100}{0{,}001} \cdot 10 = 1000000'$. Man sieht also, je weniger die beiden entgegengesetzten parallelen Kräfte P, Q an Grösse verschieden sind, je kleiner wird die Resultante R und je weiter entfernt sich ihr Angriffspunct C von B. Wären, als äusserster Fall, die beiden Kräfte gleich gross, $P = Q$, so wäre offenbar die Resultante $R = 0$ und die Entfernung ihres Angriffspuncts C von B, nämlich $x = \frac{100}{0} \cdot 10 = \infty$ (unendlich), d. h., mit andern Worten: ein solches System von zwei gleichen parallelen und entgegengesetzten Kräften (P, — P) an einer graden Linie oder einem Körper wirkend, und welches Poinsot ein Kräftenpaar (couple) nennt, hat gar keine Resultante, und es ist also auch nicht möglich, ein solches Kräftenpaar durch eine einzige Kraft in's Gleichgewicht zu bringen, was auch unmittelbar einleuchtet.

35.

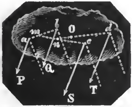
Obgleich bei rein statischen Untersuchungen man zuweilen auf ein Kräftenpaar stösst und sich dabei unwillkürlich die Vorstellung aufdringt, dass dasselbe eine Drehung verursacht, so ist es doch gar nicht nothwendig, sich hier schon von der

---

*) Man kann statt dessen auch, wie in § 31, statt der grössern Kraft Q, zwei mit ihr parallele Composanten P und $Q - P$, und zwar die erstere P im Puncte A, die andere $Q - P$ in einem so gelegenen Punct C angebracht denken, dass $a : x = Q - P : P$. Die beiden in A wirkenden Kräfte P, — P tilgen sich und es bleibt dann die in C wirkende Resultante $R = Q - P$.

Art oder Wirkung der Drehung einen bestimmten Begriff zu machen, da dies in die Dynamik gehört. Hier genügt es, nur festzuhalten, dass ein Kräftenpaar keine Resultante hat, also auch durch eine einzige Kraft nicht in's Gleichgewicht gesetzt werden kann. (S. § 124.)

36.



Lehrsatz. Wenn auf einen Körper, in ganz beliebigen, aber unveränderlichen Angriffspuncten, mehre parallele Kräfte P, Q, S, T.... gleichen Sinnes wirken, so ist die Resultante derselben gleich ihrer Summe, parallel mit denselben und der Angriffspunct der Resultante hat eine ganz bestimmte Lage.

Beweis. Nach § 29 kann man nach und nach die Resultante von je zwei und zwei der parallelen Composanten suchen. So ist z. B. P + Q die Resultante von P und Q und ihr Angriffspunct m theilt die Linie ab im bekannten Verhältniss ($am : bm = Q : P$). Die nun in m wirkende neue Composante P + Q kann man mit einer der übrigen parallelen Composanten, z. B. mit S verbinden. Ihre Resultante ist dann = P + Q + S und ihr Angriffspunct n hat eine ganz bestimmte Lage. Schreitet man so in Gedanken fort, so ergiebt sich, dass, wie der Lehrsatz behauptet, die Resultante R gleich der Summe aller parallelen Composanten und parallel mit ihnen ist und dass ihr Angriffspunct O eine ganz bestimmte Lage hat.

Zusatz. Stellt man sich vor, dieselben Kräfte drehten sich um ihre Angriffspuncte und kämen in eine andere, jedoch wieder mit einander parallele Richtung, z. B in die punctirte, so würde ihre jetzige Resultante offenbar wieder gleich ihrer Summe und parallel mit ihnen sein und ihr Angriffspunct wieder an dieselbe Stelle O fallen. Dieser Punct O wird der Mittelpunct der parallelen Kräfte genannt. Denkt man sich diesen Punct unterstützt oder fest und den Körper beliebig um ihn gedreht, so würde derselbe in jeder Lage im Gleichgewicht sein, vorausgesetzt, dass die Kräfte immer parallel und ihre Angriffspuncte dieselben blieben.

37.

Wirken die parallelen Kräfte theils nach der einen, theils nach entgegengesetzter Richtung, so könnte man die Resultante der positiven und ebenso die Resultante der negativen Kräfte jede einzeln bestimmen. Es können dann folgende drei Fälle Statt finden:

1) Sind beide entgegengesetzten Resultanten + R, — R, nicht gleich gross, so haben beide eine neue Resultante, die, nach § 34, der Grösse und Lage nach vollkommen bestimmt ist.

2) Sind beide Resultanten + R, — R' gleich gross und grade entgegengesetzt, so ist die neue Resultante = 0 und das System im Gleichgewicht.

3) Sind beide Resultanten + R, — R' gleich gross, aber nicht grade entgegengesetzt, so giebt es ein Kräftenpaar.

Drittes Buch.

Schwerpunct.

38.

Die Erfahrung lehrt, dass jeder Körper, also auch jeder materielle Punct (Atom, Element) desselben von der Erde nach verticaler Richtung angezogen wird, vermöge einer der Erde inwohnenden, ihrem Wesen nach aber völlig unbekannten Anziehungskraft, welche man auch Schwere oder Schwerkraft nennt. Diese geheimnissvolle Kraft ist also die Ursache, dass ein nicht unterstützter Körper zur Erde fällt. Von selbst würde er dies nicht thun.

In practischer Hinsicht kann man die Verticallinien, nach welchen die materiellen Puncte eines Körpers von der Erde angezogen werden, als unter sich parallel betrachten (Geometrie § 208). Wir können uns also auch sämmtliche parallele Anziehungskräfte, wenn wir auch ihre Anzahl nicht angeben können, dennoch, zufolge § 36, in eine einzige, nämlich ihre Resultante, vereint denken.

Diese Resultante, als die Summe aller parallelen Schwerkräfte, wirkt also auch vertical und ihr Angriffspunct, der hier der Schwerpunct des angezogenen Körpers genannt wird, hat eine ganz bestimmte Lage (§ 36).

Denkt man sich diesen Schwerpunct unterstützt und den Körper darum gedreht, so ist klar, dass der Körper in jeder

Lage im Gleichgewicht (Ruhe) sein muss, weil sämmtliche materielle in unveränderter Lage (gegen einander) gedachten Angriffspuncte von denselben parallelen Schwerkräften angezogen werden.

39.

Die Menge (Quantität) der Materie, oder, wenn man will, die Summe aller materiellen Puncte (Atome), welche ein Körper enthält, nennt man die Masse des Körpers und den verticalen Druck, den der Körper (vermöge der Resultante aller parallelen Anziehungskräfte) auf eine horizontale Ebene ausübt, sein Gewicht und den Raum, den der Körper einnimmt, sein Volumen.

Hat von zwei Körpern, sie seien von gleicher oder ungleichartiger Materie, der eine 2, 3...mal so viel Gewicht, als der andere, so sagt man auch, er habe 2, 3...mal so viel Masse, so dass also die relativen Grössen der Massen verschiedener Körper durch Gewichte ausgemessen werden können, weil diese den Massen proportional sind. Hierbei kann man das Gewicht einer beliebig grossen Masse als Gewichtseinheit nehmen.

40.

Haben zwei Körper gleiches Volumen (Cubikinhalt) und der eine 2, 3, 4...mal so viel Gewicht (Masse) als der andere, so sagt man, ersterer habe eine 2, 3, 4...mal so grosse Dichtigkeit, als der andere, oder auch sein specifisches Gewicht sei 2, 3, 4...mal so gross.

In Betreff der Dichtigkeiten oder specifischen Gewichte der verschiedenen festen und tropfbar flüssigen Körper vergleicht man alle mit der zur Einheit gewählten Dichtigkeit (specifischem Gewichte des Wassers (destillirt bei 4° C). So ist z. B. (in runden Zahlen) das specifische Gewicht des Goldes = 20, das des Eisens = 7, des Bleies = 11, d. h. also Gold ist 20mal, Eisen 7mal, Blei 11mal dichter als Wasser, und folglich wiegt ein Stück Gold 20mal so viel, als ein gleiches Volumen Wasser. Ein Cubikfuss Wasser wiegt nahe 66 ℔ prss., mithin wiegt ein Cubikfuss Gold 20 . 66 = 1320 ℔., ein Cubikfuss Blei 726 ℔.

41.



Aus dem Begriffe des Schwerpuncts folgt, dass wenn ein Körper in einem andern Puncte unterstützt wird, der Körper nur dann im Gleichgewicht sein kann, wenn Schwerpunct und Stützpunct zugleich in einerlei verticalen Linie liegen. Es sei C der Stützpunct und S der Schwerpunct, oberhalb oder unterhalb des Stützpuncts. Da man nun das ganze Gewicht des Körpers als im Schwerpunct S wirkend und dann alle übrigen materiellen Puncte als gewichtslos annehmen kann, so kann man, wenn die verticale Linie SV das vertical wirkende Gewicht des Körpers darstellt, dasselbe in zwei Composanten zerlegen, wovon die eine SH nach der Richtung der Linie, welche den Schwerpunct und Stützpunct verbindet, und die andere SK senkrecht auf diese Linie wirkt. Die erstere Kraft SH wird durch den Widerstand des Stützpuncts C (oder auch durch den Widerstand eines in C befestigten Fadens, woran der Körper hängt) im Gleichgewicht erhalten (vernichtet), die andere Kraft SK aber bewirkt offenbar eine Drehung des Körpers um den Stützpunct C, wodurch die augenblickliche Richtung dieser Composante SK bestimmt ist, nämlich immer senkrecht auf dem Radius CS.

42.

Kann man zwei grade Linien oder statt dessen drei Ebenen angeben, welche durch den Schwerpunct eines Körpers gehen, so muss der Schwerpunct nothwendig im Durchschnittspunct der beiden Linien, oder der drei Ebenen liegen, weil der Körper nur einen Schwerpunct hat. Dies beachtet, führt uns der vorhergehende Satz auf folgendes practische Verfahren, die Lage des Schwerpuncts eines Körpers zu finden:

Man lasse den Körper an einem Faden hängen und in's Gleichgewicht (Ruhe) kommen, alsdann ist der Faden vertical gespannt und der Schwerpunct liegt in der Richtung des Fadens. Befestigt man darauf einen andern Punct des Körpers an den Faden und lässt ihn abermals daran hängend in's Gleichgewicht kommen, so liegt der Schwerpunct wiederum

in der Richtung des Fadens und folglich im Durchschnittspunct beider Richtungen.

Oder man lege den Körper in drei verschiedenen Berührungslinien so auf eine scharfe Kante, dass er jedesmal im Gleichgewicht ist, dann liegt der Schwerpunct im Durchschnittspunct der drei durch diese Berührungslinien (Stützlinien) gedachten Vertical-Ebenen.

43.

Die Lage des Schwerpuncts eines Körpers hängt offenbar von dessen Form ab, und es ist wohl klar, dass er nicht immer in's Fleisch hinein fällt. Oft spricht man auch vom Schwerpunct mehrer Massen, die gar nicht mit einander verbunden sind. Denkt man sich z. B. zwei gleich grosse getrennte Massen, so liegt (§ 29) der (gemeinschaftliche) Schwerpunct beider Massen in der Mitte der graden Linie, welche ihre Schwerpuncte verbindet.

44.

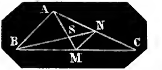
Die Schwerpuncte derjenigen Körper, welche eine bestimmte geometrische Figur und durchgehends gleiche Dichtigkeit haben, lassen sich mathematisch genau bestimmen, indem man solche Körper auf reine geometrische zurückführen kann, d. h. wir können bei solchen Körpern von der Beschaffenheit der Materie (von der Dichtigkeit) ganz absehen. Dieselbe Lage, welche z. B. der Schwerpunct in einer Kugel (Cylinder etc.) aus Eisen hat, muss er auch in einer mathematisch gleichen Kugel (Cylinder etc.) aus jedem andern Material (Holz, Kupfer etc.) haben, und man braucht deshalb nur anzunehmen, dass jeder der stetig auf einander folgenden geometrischen Puncte gleich stark und nach parallelen Richtungen von der Erde angezogen wird.

45.

Lehrsatz. Der Schwerpunct einer graden Linie liegt in ihrer Mitte.

Beweis. Nach § 29 geht die Resultante von je zwei von der Mitte gleich weit entfernten und gleich schwer gedachten Puncten, und mithin auch die Resultante aller Puncte durch die Mitte.

46.



Lehrsatz. Der Schwerpunct S eines Dreiecks liegt in der Linie, welche eine beliebige Ecke A desselben mit der Mitte M der gegenüber liegenden Seite verbindet, und zwar um ein Drittel dieser Linie von der Mitte M entfernt. In Zeichen: $MS = \frac{1}{3} MA$.

Beweis. Ist M die Mitte von BC, so geht die Linie AM durch die Mitten oder Schwerpuncte aller mit BC parallelen Linien. Der gemeinschaftliche Schwerpunct aller dieser unzähligen Linien und mithin auch der Schwerpunct von der Fläche des Dreiecks muss also irgendwo in der Linie AM liegen. Denkt man noch von einer zweiten Ecke B nach der Mitte N der gegenüber liegenden Seite die Linie BN gezogen, so muss aus demselben Grunde der Schwerpunct des Dreiecks auch in dieser Linie und mithin in dem Durchschnittspunct S beider liegen (§ 42).

Um nun zu zeigen, dass MS der dritte Theil von MA ist, denke man MN gezogen, dann ist $MN \parallel AB$ (Geometrie § 114), folglich $\triangle MNS \backsim \triangle ABS$, mithin:

$$MS : AS = MN : AB.$$

Da nun aber auch $\triangle CMN \backsim \triangle CAB$ und also:

$$MN : AB = CN : CA := 1 : 2,$$

so ist auch $MS : AS = 1 : 2$, d. h. MS ist in AS just zweimal enthalten und folglich wie behauptet:

$$MS = \tfrac{1}{3} MA.$$

47.

Der Schwerpunct von einem Parallelogramm liegt offenbar im Durchschnittspunct beider Diagonalen, weil jede derselben jede mit der andern Diagonale parallele Linie halbirt.

Eben so ist leicht einzusehen, dass der Schwerpunct von einer Kreisfläche sowohl, als von der ganzen Kreislinie, oder auch Kreisringe, im Mittelpunct liegt, weil er in jedem von zwei auf einander senkrechten Durchmessern liegen muss.

Ebenso ist klar, dass der Schwerpunct eines regelmässigen Vielecks im Mittelpunct liegt.

48.

Um den Schwerpunct eines unregelmässigen Vierecks durch Zeichnung zu finden, könnte man dasselbe durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegen, nach § 46 die Schwerpuncte beider Dreiecke bestimmen und sie durch eine grade Linie verbinden, in welcher der gesuchte Schwerpunct liegen muss. Theilt man darauf, durch die zweite Diagonale, dasselbe Viereck in zwei andere Dreiecke und verbindet wieder beide Schwerpuncte durch eine grade Linie, so giebt der Durchschnitt dieser und der erstern Linie den gesuchten Schwerpunct des Vierecks.

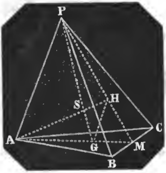
Zusatz. Ebenso könnte man durch Zeichnung den Schwerpunct von einem unregelmässigen Fünfeck finden, indem man es durch zwei verschiedene Diagonalen in ein Dreieck und Viereck theilt, jedesmal, wie eben gezeigt, die Schwerpuncte beider bestimmt und durch eine grade Linie verbindet.

Dieses zeichnende Verfahren, obwohl theoretisch richtig und auf jedes Vieleck ausdehnbar, ist in practischer Hinsicht zu weitläufig. (S. § 145.)

49.

Aus dem Vorhergehenden folgt nun ganz von selbst, dass der Schwerpunct eines Prismas oder auch eines Cylinders in der Mitte der Linie liegt, welche die Schwerpuncte der parallelen Grundflächen mit einander verbindet, weil diese Linie durch die Schwerpuncte aller, mit der Grundfläche parallelen Schnitte geht.

50.



Lehrsatz. Der Schwerpunct einer Pyramide liegt in der graden Linie, welche den Schwerpunct der Grundfläche mit der Spitze verbindet und zwar, wenn man diese Linie in vier gleiche Theile theilt, im ersten Theilungspunct von der Grundfläche ab gerechnet.

Beweis. Sei die Pyramide zuerst eine dreiseitige und G der

Schwerpunct der Grundfläche, dann liegt der Schwerpunct der Pyramide in der Linie G P, weil diese durch die Schwerpuncte aller mit der Grundfläche parallelen Durchschnitte geht. Betrachten wir nun A als Spitze der Pyramide und verbinden sie mit dem Schwerpunct H der gegenüber liegenden Grundfläche, so muss aus demselben Grunde der fragliche Schwerpunct der Pyramide auch in dieser Linie A H, mithin in dem Durchschnittspunct S beider Linien liegen*). Denkt man nun G mit H verbunden, so ist $GH \parallel AP$ (Geom. § 114). Da nun $\triangle GHS \sim \triangle APS$ und

$$GS : SP = GH : AP$$

und weil auch $\triangle MGH \sim \triangle MAP$ und

$$GH : AP = MG : MA = 1 : 3 \quad (\S\ 46),$$

so muss auch G S in S P dreimal enthalten sein, mithin ist, wie der Lehrsatz behauptet:

$$GS = \tfrac{1}{4} . GP.$$

Hat man nun eine beliebig vielseitige Pyramide, so liegt der Schwerpunct erstlich in der Linie, welche den Schwerpunct der Grundfläche mit der Spitze verbindet. Denkt man nun die Pyramide in dreiseitige zerlegt, so müssen die Schwerpuncte aller dieser dreiseitigen Pyramiden und mithin auch der Schwerpunct der ganzen Pyramide in einer mit der Grundfläche parallelen Ebene liegen, welche von allen, von der Grundfläche nach der Spitze gehenden Linien den vierten Theil abschneidet (Geom. § 166).

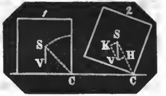
Zusatz. Vom Schwerpunct eines Kegels, als einer Pyramide von unendlich vielen Seiten, gilt offenbar dasselbe, d. h. der Schwerpunct ist um ein Viertel der Linie, welche den Mittelpunct der Grundfläche mit der Spitze verbindet, von der Grundfläche entfernt. (S. VI. Buch.)

51.

Stabilität. Ein Körper, der auf einer horizontalen Ebene steht, heisst stabil (standfähig), wenn er durch Drehung um einen seiner Stützpuncte (oder Kanten) ein wenig aus seiner Lage gebracht und dann sich selbst überlassen wird, von selber wieder in seine anfängliche Lage zurückkehrt.

---

*) Dass die beiden Linien sich nothwendig schneiden müssen, folgt daraus, weil sie in einerlei Ebene (in der des Dreiecks M A P) liegen, auch schon daraus: weil die Pyramide nur einen Schwerpunct hat.



Bringt man z. B. einen prismatischen Körper, dessen Schwerpunct in S sein soll, aus der Lage (1) in die Lage (2), so muss offenbar der Schwerpunct S, in welchem man das ganze Gewicht des Körpers vereint denken kann, gehoben werden. Denkt man sich jetzt den Schwerpunct S mit dem Stützpunct C verbunden, (oder wenn der Körper um eine Kante gedreht wird, vom Schwerpunct S auf diese Kante ein Perpendikel SC gefällt) und das stets vertical wirkende Gewicht SV des Körpers nach dieser Linie SC und einer darauf senkrechten zerlegt (§ 41), so wird augenscheinlich die Composante SH durch den Widerstand des festen Punctes C aufgehoben, die andere Composante SK aber bringt den Körper wieder in seine erste Lage zurück.

Stände der Körper statt auf einer horizontalen, auf einer dagegen geneigten Ebene, so könnte das Gewicht des Körpers ihn noch immer gegen das Umstürzen schützen, dagegen aber, wenn die Reibung nicht gross genug wäre, zum Gleiten nöthigen, wie z. B. ein Wagen auf glatter, schräger Strasse glitscht (§ 32). Dies berücksichtigt, können wir also sagen: ein Körper ist allemal stabil, wenn die durch seinen Schwerpunct gehende Verticale die Unterstützungsfläche, oder, wenn der Körper in mehren nicht in grader Linie liegenden Puncten unterstützt ist, die durch diese Stützpuncte gedachte Fläche, ob eben oder krumm, trifft.

Wäre der Körper nur in einem Puncte oder auch in mehren, die in einer verticalen Ebene liegen, unterstützt und die durch den Schwerpunct gehende verticale Linie träfe diesen Punct oder die grade oder krumme Unterstützungslinie, so hätte der Körper wohl ein augenblickliches Gleichgewicht, die geringste Erschütterung würde ihn aber aus dieser Lage bringen, und der Körper durch sein eigenes Gewicht umstürzen. Ein so unterstützter Körper heisst labil (schwankend).

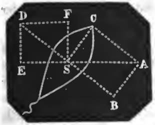
Ist endlich ein Körper in jeder Lage im Gleichgewicht (z. B. eine Kugel auf einer horizontalen Ebene), so heisst ein solches Gleichgewicht ein indifferentes. Die Stabilität eines Körpers ist namentlich in der Baukunst zu berücksichtigen, wo man durch Strebepfeiler die Stabilität eines Gebäudes herzustellen oder zu vergrössern sucht.

52.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass die Stabilität eines Körpers desto grösser ist, je grösser sein Gewicht und je grösser die Unterstützungsfläche und folglich je grösser die Höhe ist, auf welche sein Schwerpunct beim Umstürzen gehoben werden müsste, und dass daher beim Beladen eines Wagens (Schiffes etc.) darauf zu sehen ist, dass die schwersten Sachen unten liegen, damit der Schwerpunct möglichst tief komme.

Befinden sich Menschen in einem schwankenden Boote, so wird die Gefahr des Umschlagens viel geringer, wenn sie sich niederlegen, grösser aber, wenn sie aufstehen. Auf gewandtem Balanciren des Schwerpuncts beruhen die Kunststücke der Seiltänzer etc. Steht ein Mensch grade, so trifft die durch seinen Schwerpunct gehende Verticale zwischen seinen Füssen die Unterstützungsfläche. Hebt er nun den rechten Fuss auf, oder nimmt er statt dessen einen Körper in die rechte Hand, so muss er sich nothwendig nach der linken Seite hinüberbiegen, oder nach der rechten fallen. Das Gehen und Laufen ist ein beständiges vorwärts Fallen und Stützen. Wer sitzt, muss beim Aufstehen sich erst so weit bücken, bis die durch seinen Schwerpunct gehende Verticale zwischen seine Füsse fällt. Steine kann man so viele über einander hervorragend auf einander legen, bis jene Verticale den untersten Stein nicht mehr trifft u. m. dgl.

53.

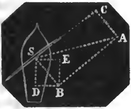


Frage. Wie geht es zu, dass der Wind einen Drachen zum Steigen bringt?

Antwort. Man kann annehmen, dass jeder Punct des Drachen, nach horizontaler Richtung, gleich stark vom Winde gedrückt wird. Sei A S die Resultante dieser parallelen Kräfte, nämlich die Kraft des Windes, die man sich im Schwerpunct S des Drachen concentrirt denken kann. Ist nun die Fläche des Drachen gegen A S unter einem spitzen Winkel $A\widehat{S}C$ geneigt, so zerlegt sich

die Druckkraft AS in die beiden Composanten CS und BS, wovon erstere CS parallel mit der Fläche des Drachen ist und deshalb keine Wirkung darauf ausübt (abgleitet), die andere BS aber drückt senkrecht darauf (§ 32). Stellen wir, der Deutlichkeit halber, diese Druckkraft BS durch eine gleiche in derselben Richtung wirkende Zugkraft DS dar, so können wir diese wieder in die beiden horizontal und vertical wirkenden Kräfte ES und FS zerlegen. Die Zugkraft der Schnur lässt sich ebenfalls in eine horizontale und eine vertical nach unten ziehende zerlegen. Ist nun erstere verticale Kraft FS grösser als letztere, sammt dem Gewicht des Drachen und eines Theils der Schnur, so steigt der Drache und beschreibt wegen seiner stets sich ändernden Lage gegen die Richtung der Schnur einen Bogen.

54.



Frage. Woher kommt es, dass der gegen die Richtung des Kiels und gegen die als eben angenommene Fläche des Segels unter einem spitzen Winkel gerichtete Wind ein Schiff dennoch mehr nach der Richtung des Kiels, als nach der Breitseite forttreibt?

Antwort. Die Kraft des Windes AS zerlegt sich von selbst in zwei Composanten, nämlich in CS parallel mit dem Segel und also darauf wirkungslos, und in BS, normal auf das Segel drückend. Letztere Kraft BS zerlegen wir ferner in die beiden Composanten DS und ES; erstere in der Richtung des Kiels und letztere darauf senkrecht wirkend.

Weil nun der Widerstand des Wassers auf die Breitseite des Kiels bedeutend grösser ist, als nach der Richtung des Kiels, so ist klar, dass der Punct S sich nicht nach der Richtung von BS, sondern mehr nach der Richtung des Kiels bewegen wird. Auch ist klar, wie durch Umlegen des Segels (laviren) das Schiff ein Ziel erreichen kann, von welchem der Wind herkommt.

Zusatz 1. Um auch die Wirkung des Steuers einzusehen, braucht man nur zu bedenken, dass es ganz einerlei ist, ob

man mit fortgezogenem Steuer gegen das Wasser oder ob umgekehrt das Wasser gegen das Steuer stösst. Dieser Druck des Wassers zerlegt sich in zwei Kräfte: die eine, parallel mit der Ebene des Steuers, gleitet ab, die andere, normal darauf, dreht das Schiff.

Zusatz 2. Ebenso zeigt man durch zweimalige Zerlegung, dass die horizontale Kraft des Windes die schräg gegen ihn gerichteten (windschiefen) Flügel einer Mühle drehen kann.

Viertes Buch.

Von den einfachen Maschinen.

55.

So wie es Aufgabe der Wissenschaft ist, nach den mancherlei in der Natur liegenden Kräften-Quellen zu forschen und den Zusammenhang von Ursache und Wirkung, d. h. die Gesetze zu entdecken, nach welchen die Wirkungen aus den Ursachen erfolgen und die zahllosen bunten Erscheinungen eintreten müssen, so ist es Aufgabe der Technik, jene ursprünglich ihrer selbst willen und gar nicht ihres practischen Nutzens halber erworbenen Kenntnisse auszubeuten und sich dienstbar zu machen.

Ein Theil dieser Aufgabe besteht darin, mittelst einer Kraft, über welche man Herr ist, eine Arbeit zu verrichten oder einer andern Kraft, Last genannt, das Gleichgewicht zu halten oder auch zu bewegen und zwar vermittelst geeigneter Vorrichtungen oder Apparate, welche man Maschinen nennt. Statt z. B. die Arbeit: Korn in Mehl zu verwandeln, durch Menschenhände verrichten und in Mörsern zerstossen zu lassen, wie es vor etwa zweitausend Jahren, als man noch keine Mühlen hatte, geschah, kam ein denkender Mensch auf den Einfall, dazu irgend eine geeignete Naturkraft, z. B. die Kraft des Windes, des Wassers, des Dampfes etc. zu benutzen. Aber keine derselben kann die ihr aufgegebene Arbeit unmittelbar vollbringen. Der menschliche Geist musste der ihm

dienenden Naturkraft erst ein passliches Werkzeug, gleichsam Hände und Füsse, geben, die sich nach vorgeschriebenen mechanischen Gesetzen bewegen.

56.

Die Erfindung solcher Maschinen erfordert ein ganz besonderes Genie und ist deshalb nicht Jedermanns Sache. Neigung, Anlage und grosse Beharrlichkeit im Nachdenken ist hier durchaus erforderlich, ausserdem Kenntniss der schon vorhandenen Maschinen, einestheils damit man keine Erfindung macht, die schon gemacht worden, anderntheils, um durch die Betrachtung und das Studium der schon vorhandenen Maschinen auf neue Ideen geführt zu werden. Der Geist muss einen guten Gedanken oftmals Jahre lang mit sich herumtragen, bevor er fruchtbar und ausführbar wird. Die Phantasie muss eigentlich Alles schaffen, die strenge Wissenschaft sie aber im Zaum halten und regeln, damit sie nicht gegen mechanische Gesetze verstösst und Luftschlösser baut. Was theoretisch falsch ist, ist practisch unmöglich. Wer die Idee einer neuen Maschine fasst, muss sie erst nach den Lehren der exacten Wissenschaft prüfen, bevor er zur Ausführung schreitet.

57.

Maschinen hat es wohl schon lange gegeben, als von Mechanik und Physik noch gar nicht die Rede war, aber gegen die jetzigen Anforderungen verglichen, in sehr unvollkommener Weise. Die Wasseruhren der Chaldäer und unsere Chronometer! Die Webstühle und Schiffe der Phönicier und unsere Jacquards und Dampfschiffe! Erst in den letzten zwei Jahrhunderten, als man die seit Archimedes Zeiten ganz vernachlässigten exacten Wissenschaften wieder aufnahm und mit Eifer cultivirte, konnte die Mechanik sicher begründet, auf ihre jetzige Höhe (Himmelsmechanik) gebracht und durch ihre Hülfe zu gleicher Zeit auch das Maschinenwesen (die Technik) zu seiner jetzigen Vollkommenheit geführt werden. Jetzt wird es, ohne einige Kenntnisse der Mathematik, Mechanik und Naturwissenschaft, einem sogenannten rein practischen Menschen wohl schwerlich möglich sein, neue grossartige Erfindungen zu machen, oder auch nur die schon in's Leben gerufenen

gehörig zu verstehen. Aber auch jene theoretischen Kenntnisse befähigen allein noch nicht zu neuen Erfindungen, so wenig als die Kenntniss der Musik und Sprache allein zum Componiren und Dichten befähigen. Es muss, wie gesagt, noch ein ganz besonderes Genie hinzukommen.

58.

Obgleich die Maschinenkunde nur eine besondere Anwendung der theoretischen Mechanik bildet, so wie die Feldmesskunst nur eine besondere Anwendung der Geometrie ist, so hat doch in neuerer Zeit die Maschinenkunde eine solche Ausdehnung erhalten, dass sie bereits dicke Bände füllt (Maschinenencyclopädie). Ja, die vollständige Theorie mancher einzelnen Maschine (z. B. Dampfmaschine, Turbine, Räderwerk etc.), so wie auch manche andere specielle Anwendungen der rationalen Mechanik (z. B. statische Baukunst, Wasserbau, Festigkeit der Materialien etc.) erfordern zu ihrer vollständigen Begründung eigene Werke.

59.

In Betreff des Mechanismus einer Maschine findet aber der sehr merkwürdige Umstand Statt, dass, wie complicirt dieselbe auch erscheinen möge, sie höchstens doch nur aus drei verschiedenartigen Gliedern oder Organen, welche man einfache Maschinen nennt, zusammengesetzt sein, obwohl eins dieser Organe in einer und derselben Maschine mehrmals vorkommen kann, die arbeitenden, in einander greifenden Hände gleichsam vervielfacht sind.

Da nun aber jene erwähnten besondern Werke über einzelne Maschinen sowohl (Dampfmaschine, Turbine, Uhren etc.), als auch die besondern mechanischen Wissenschaften (Wasserbaukunst etc.) die Kenntniss dieser drei einfachen Maschinen nicht mittheilen, sondern diese sowohl, als auch die zum Verständniss solcher Werke nöthige Kenntniss der Mechanik und Physik als bekannt voraussetzen, so muss aus diesem Grunde die theoretische Mechanik auch die Theorie der erwähnten drei einfachen Maschinen mittheilen. Diese sind nun dem Namen nach:

1) Der Hebel (Rolle, Rad und Welle).
2) Die schiefe Ebene (Keil und Schraube).
3) Seil.

60.

Der Hebel. Eine Stange (jeder Körper), welche um einen festen Stützpunct C drehbar ist, und an welcher zwei oder mehre Kräfte wirken, heisst ein Hebel, und zwar ein zweiarmiger oder einarmiger, je nachdem der Stützpunct zwischen den Angriffspuncten der Kräfte oder ausserhalb derselben liegt. Die Linie, welche den Stützpunct mit dem Angriffspunct einer Kraft verbindet, heisst der Hebelarm dieser Kraft. Die Form des Hebels, ob grade oder krumm, ist gleichgültig, wenn nur der Stützpunct und die Richtungen der Kräfte in einerlei Ebene liegen.

61.



Aufgabe. Es sei AB ein um den Stützpunct C drehbarer, vorläufig aber noch gewichtslos gedachter grader zweiarmiger Hebel, an dessen Enden zwei parallele Kräfte P und Q wirken. Man frägt nach den Bedingungen des Gleichgewichts.

Auflösung. Zufolge § 29 ist die Resultante der beiden parallelen Kräfte $= P + Q$. Fällt nun der Angriffspunct dieser Resultante genau mit dem festen Drehpunct C zusammen, so findet Gleichgewicht, mithin keine Drehung Statt. Der Widerstand des Stützpuncts C kann dann als eine Kraft betrachtet werden, welche der Resultante gleich und entgegengesetzt wirkt.

Setzt man also die Länge der Hebelarme $CA = p$, $CB = q$, so ist Gleichgewicht vorhanden, wenn (§ 29):

$$P : Q = q : p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

d. h. der Stützpunct muss für das Gleichgewicht eine solche Lage haben, dass die Hebelarme sich umgekehrt wie die daran wirkenden Kräfte verhalten.

62.

Erklärung. Fällt man vom Stützpunct eines Hebels auf die Richtung einer daran wirkenden Kraft ein Perpendikel, so nennt man das Product aus der Kraft und der Länge des

Perpendikels, beide als unbenannte Zahlen betrachtet, das (statische) Moment der Kraft. Aus vorstehender Proportion folgt:

$$\mathrm{P}p = \mathrm{Q}q \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Wenn also beim zweiarmigen Hebel zwei Kräfte P und Q daran senkrecht wirken (auf welchen Fall jeder andere zurückgeführt werden kann), so sind die Kräfte im Gleichgewicht, wenn ihre entgegengesetzten Sinnes drehenden Momente gleich sind.

Diese Formel (2) ist in der Praxis viel bequemer, als die Proportion (1) (§ 61) anzuwenden, weshalb man auch das eben erklärte und wohl zu merkende Kunstwort Moment in die Mechanik eingeführt hat.

63.

Aufgabe. Es sei der Hebelarm CB = 1½ Fuss, die in B senkrecht daran wirkende Last Q = 100 ℔., der Hebelarm CA = 5 Fuss. Wie gross muss die in A senkrecht daran wirkende Kraft P sein, um das Gleichgewicht herzustellen?

Auflösung. Da die Momente gleich sein müssen, so hat man ganz einfach:

$$5\,\mathrm{P} = 100 \,.\, 1\tfrac{1}{2}, \text{ woraus:}$$
$$\mathrm{P} = 30 \text{ ℔.}$$

Anmerkung. Wem es paradox erscheinen sollte, dass 100 ℔. durch 30 ℔. im Gleichgewicht erhalten werden, der bemerkt nicht, dass dies eine abgekürzte Redensart ist, und dass der Sinn ist: 100 ℔. werden durch 30 ℔. und den Widerstand des Stützpuncts (der hier = 130 ℔. ist), oder 100 ℔. werden vermittelst des Stützpuncts einer Maschine durch 30 ℔. im Gleichgewicht erhalten.

64.

Princip der virtuellen Geschwindigkeit. Nähme man im vorigen Beispiel die Kraft P = 30 ℔. nur um ein wenig grösser, so würde sie die Last Q = 100 ℔. bewegen, und es ist klar, dass, wenn man den erforderlichen Hebelarm nur lang genug nehmen könnte, man mit einer beliebig kleinen Kraft eine beliebig grosse Last im Gleichgewicht erhalten und bewegen kann, wenn man die zum Gleichgewicht erforderliche Kraft

nur um die Idee vergrössert. Weil dann aber die Längen der gleichzeitig von den Angriffspuncten der Kraft und Last beschriebenen Bögen sich wie die Hebelarme verhalten, so sieht man auch, dass, wenn die nur um die Idee vergrössert gedachte Kraft m, z. B. 1000mal kleiner wäre, als die bewegte Last, dann der Weg, den die Kraft durchläuft, dafür auch umgekehrt 1000mal so gross sein müsste, als der Weg, welchen die Last durchläuft. Man pflegt dies so auszudrücken, dass man sagt: Was an Kraft gewonnen wird, geht an Zeit verloren.

Dieses durch die ganze Mechanik Statt findende Gesetz, welches sich bei jeder Maschine leicht nachweisen lässt, wird das Princip der virtuellen Geschwindigkeit genannt; das Wort virtuell steht hier im Vergleich zu actuell, weil die zum Gleichgewicht erforderliche und dann nur um die Idee vergrösserte Kraft noch keine wirkliche Bewegung, sondern nur das Bestreben dazu hervorbringt.

65.

Aufgabe. Es sei der Hebelarm $CB = q = \frac{1}{5}$ Fuss, die daran rechtwinklig wirkende Last $Q = 1000$ ℔. Wie lang muss der andere Hebelarm $CA = p$ sein, damit die daran rechtwinklig wirkende Kraft $P = 10$ ℔. mit der Last im Gleichgewicht ist?

Auflösung. Nach dem Satz der gleichen Momente hat man hier:

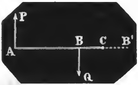
$$10p = 1000 \cdot \tfrac{1}{5}, \text{ woraus:}$$
$$p = 20'.$$

66.

Aus dem Princip der virtuellen Geschwindigkeit folgt, dass, wenn eine Maschine nicht als Instrument dienen soll (z. B. eine Uhr), sondern es darauf ankömmt, einer Last das Gleichgewicht zu halten, oder sie zu bewegen, man nur in folgenden Fällen dies durch Vermittelung einer Maschine thun wird: 1) wenn nicht Kraft genug vorhanden ist, es unmittelbar zu thun, 2) wenn die Kraft billig zu haben ist (z. B. Dampfkraft, electrische Kraft, Muskelkraft der Zugthiere), 3) wenn die Kraft ganz umsonst zu haben ist (z. B.

die Kraft des Windes, des Wassers etc.), und dann muss die Maschine möglichst accurat construirt und ja nicht complicirter sein, als eben nothwendig ist.

67.



Aufgabe. Es sei AC ein um den Stützpunct C drehbarer, vorläufig aber noch gewichtslos gedachter, grader einarmiger Hebel, an welchem zwei senkrechte Kräfte P, Q entgegengesetzt wirken. Man frägt nach den Bedingungen des Gleichgewichts.

Auflösung. Die Kraft Q ist bestrebt, den Hebel im entgegengesetzten Sinne (nach unten), wie die Kraft P zu drehen und würde offenbar ganz dieselbe Wirkung hervorbringen, wenn sie statt in B, in einer gleichen Entfernung rechts vom Drehpunct in B' (indem man sich den Hebel über den Stützpunct hinaus nach rechts um $CB' = CB$ verlängert denkt) nach entgegengesetzter Richtung (nach oben) wirkte. Als nothwendige Bedingung des Gleichgewichts müsste dann aber, wie beim zweiarmigen Hebel, $P . CA = Q . CB'$ sein, oder indem wir wieder die Längen der Hebelarme $CA = p$, $CB = q$ setzen:

$$Pp = Qq$$

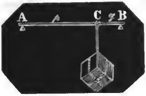
so dass also auch beim einarmigen Hebel dasselbe Gesetz Statt findet, wie beim zweiarmigen, nämlich: die Längen der Hebelarme müssen sich umgekehrt verhalten, wie die senkrecht daran wirkenden Kräfte, oder kürzer: die Momente, welche im entgegengesetzten Sinne drehen, müssen für den Zustand des Gleichgewichts nothwendig gleich sein.

Zusatz. Um den Druck auf den Stützpunct C zu erhalten, denke man sich statt des Stützpunctes die daselbst zur Erhaltung des Gleichgewichts nothwendige, im gleichen Sinne mit P wirkende Kraft R angebracht, so muss nach § 34 $R + P = Q$ sein, und folglich ist hier der Druck auf den Stützpunct C, nämlich $R = Q - P$.

68.

Die schon § 31 gelöste, sehr häufig vorkommende Aufgabe, nämlich den Druck, den eine Kraft auf einen Punct ausübt, auf zwei andere damit in grader Linie liegende

Puncte zu vertheilen, lässt sich jetzt durch die Theorie des einarmigen Hebels viel einfacher lösen.



Die Aufgabe war: Welchen Druck verursacht die an einer Stange A B rechtwinklig wirkende Last R = 200 ℔. auf die mit dem Angriffspunct C in grader Linie liegenden Stützpuncte A und B, wenn $AC = p = 6'$ und $BC = q = 2'$ ist?

Betrachten wir nun die Stange A B als einen einarmigen Hebel und zuerst B als Drehpunct, so ist offenbar die in A zum Gleichgewicht erforderliche senkrechte Kraft x gleich dem Druck, den dieser Stützpunct auszuhalten hat, daher § 67:

$$(p + q)\, x = q \,.\, R, \text{ woraus:}$$

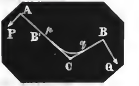
$$x = \frac{q}{p + q} . R = 50.$$

Betrachtet man dagegen A als Drehpunct, so hat man für den Druck y in B ebenso einfach:

$$(p + q)\, y = p \,.\, R, \text{ woraus:}$$

$$y = \frac{p}{p + q} . R = 150.$$

69.

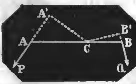


Bilden die beiden Arme eines zweiarmigen Hebels statt einer graden Linie einen u n v e r ä n d e r l i c h e n Winkel mit einander (wie bei den Glockenzügen), so heisst ein solcher, um den Scheitel C als Stützpunct drehbarer Hebel, ein W i n k e l h e b e l. Wirken an den Armen desselben und in der Ebene des Winkels die beiden Kräfte P und Q senkrecht, so muss für den Zustand des Gleichgewichts offenbar auch hier dasselbe Gesetz, wie beim gradlinigten Hebel Statt finden, nämlich die Längen der Hebelarme p und q müssen sich umgekehrt verhalten, wie die daran wirkenden Kräfte $p : q = Q : P$, oder kürzer: Die Momente, welche entgegengesetzten Sinnes zu drehen bestrebt sind, müssen gleich sein: $Pp = Qq$.

Denn, wären die Hebelarme gleich lang, so müssen, für das Gleichgewicht, offenbar auch die Kräfte gleich sein; wäre der eine Hebelarm C A zweimal so lang als der andere C B,

so müsste die Kraft P halb so gross als Q sein; denn ob Q in B oder in gleicher Entfernung vom Stützpunct, am andern Hebelarm in B', und in entgegengesetzter Richtung zu drehen bestrebt ist, ist offenbar gleichgültig und dann ist, wie beim einarmigen Hebel, Gleichgewicht, wenn $P.CA = Q.CB'$.

70.

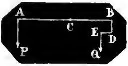


Wirken die Kräfte an einem Hebel (ob zwei- oder einarmig, ist gleichgültig) nicht senkrecht, wie bisher angenommen, so fälle man vom Stützpunct auf die Richtungen der Kräfte die Perpendikel CA', CB' und denke die Angriffspuncte A und B nach A' und B' verlegt,*) dann hat man einen Winkelhebel und es findet Gleichgewicht Statt, wenn:

$$P.CA' = Q.CB'.$$

Zusatz. Der Hebel möge eine Form haben, welche er wolle, grade, gebrochen oder krumm, zur Beurtheilung des Gleichgewichts braucht man immer nur vom Stützpunct auf die Richtungen der Kräfte Perpendikel zu fällen, diese als die Hebelarme zu betrachten und die Momente, welche entgegengesetzten Sinnes drehen, mit einander zu vergleichen.

71.



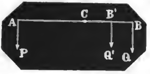
Aufgabe. Der eine Hebelarm sei zweimal rechtwinklig umgebogen. In E wirkt eine Last Q = 30 ℔ senkrecht an DE. Wie gross muss die zur Herstellung des Gleichgewichts rechtwinklig am Hebelarm CA wirkende Kraft P sein, wenn CA = 4', CB = 3' und DE = 1' ist.

Auflösung. Zufolge § 16 muss sein: $4\,P = 2.30$ woraus: $P = 15$ ℔.

---

*) Man denke sich die Linie AB an einem gewichtslosen, um C drehbaren Körper, in welchem die Puncte A', B' liegen. (§ 29 Rdmkg.)

72.



Wirken an irgend einem Hebel mehr als zwei Kräfte senkrecht, so findet Gleichgewicht Statt, wenn die Summe der Momente, welche den Hebel in einem Sinne zu drehen streben, gleich ist der Summe der Momente, welche im entgegengesetzten Sinne wirken.

1. Beweis. Es genügt, die Richtigkeit des Satzes zu beweisen, wenn nur nach der einen Seite mehre Kräfte wirken. Seien deshalb die Hebelarme $CA = p$, $CB = q$, $CB' = q'$ und P, Q, Q' die senkrecht daran wirkenden Kräfte. Die Kraft P kann man sich als die Summe zweier Kräfte V, V' denken, $P = V + V'$, die beide senkrecht am Hebelarm $CA = p$ wirken. Wäre dann V mit Q und V' mit Q' im Gleichgewicht, so hätte man gleichsam zwei im Gleichgewicht befindliche Hebel mit einem gemeinschaftlichen Stützpunct C. Wenn also:

$$V\,p = Q\,q$$
$$\text{und } V'p = Q'q',$$

so ist auch, wenn man beide Gleichungen addirt (weil $V\,p + V'p = (V + V')p = Pp$):

$$Pp = Qq + Q'q'.$$

Wäre aber das Moment der Kraft linker Hand nicht gleich der Summe der Momente rechter Hand, so könnte auch kein Gleichgewicht Statt finden.

Wirkten rechter Hand drei Kräfte Q, Q', Q'', so könnte man in A drei Kräfte $V + V' + V'' = P$ denken, welche mit Q, Q', Q'' einzeln im Gleichgewicht sind etc.

2. Beweis. Statt der beiden parallelen Kräfte Q und Q' kann man ihre Resultante $Q + Q'$ gesetzt denken. Setzen wir den Abstand ihres Angriffspuncts m vom Stützpunct C, nämlich $Cm = x$, so ist (§ 29):

$$x - q' : q - x = Q : Q', \text{ woraus:}$$
$$(Q + Q')\,x = Q\,q + Q'q',$$

d. h. die Resultante von Q und Q' nämlich $Q + Q'$ muss, um dieselbe Wirkung am Hebel hervorzubringen, wie die Composanten Q und Q', einen solchen Hebelarm $Cm = x$ haben, dass ihr Moment gleich der Summe beider Momente ist.

Wirkten rechter Hand drei Kräfte Q, Q', Q'', so braucht man den vorhergehenden Schluss nur einfach zu wiederholen;

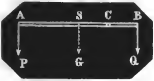
die neue Resultante von $Q + Q' + Q''$ muss dann einen solchen Hebelarm y haben, dass ihr Drehmoment gleich der Summe beider Momente ist, nämlich:

$$(Q + Q' + Q'')\,y = (Q + Q')\,x + Q''q''.$$

Für den Zustand des Gleichgewichts muss nun $Pp = (Q + Q' + Q'')\,y$ sein, folglich, wie behauptet:

$$Pp = Qq + Q'q' + Q''q''.$$

73.



Aufgabe. An einem zweiarmigen um C drehbaren prismatischen Hebel wirkt eine Last $Q = 300$ ℔. Wie gross ist die zum Gleichgewicht erforderliche Kraft P, wenn $CA = p = 8'$, $CB = q = 3'$ und das Gewicht des Hebels $G = 50$ ℔ ist.

Auflösung. Das Gewicht des Hebels kann man sich im Schwerpunct vereint und dann die Arme als gewichtslos denken. Weil der Hebel prismatisch ist, so fällt der Schwerpunct S genau in die Mitte und es ist der Hebelarm $CS = \frac{p+q}{2} - q = \frac{p-q}{2}$, folglich muss sein:

$$Pp + G.\frac{p-q}{2} = Qq$$
$$8P + 2\tfrac{1}{2} . 50 = 3 . 300$$
$$P = 96\tfrac{7}{8} \text{ ℔}.$$

74.

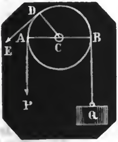
Im practischen Leben kömmt der Hebel sehr vielfach und in verschiedenen Gestalten zur Anwendung, z. B. die Waage, Karre, Brechstange, Kneipzange, Scheere, Sense, Schlüssel etc. Jeder Muskel ist an zwei verschiedenen Knochen befestigt, das Gelenk bildet den Drehpunct für den beweglichen Knochen (Hebel). Man kann in der Hand mit ausgestrecktem Arm 25 ℔ halten. Das Gewicht ist dann über 33mal weiter vom Schultergelenk entfernt, als der Angriffspunct des sich ver-

kürzenden und dadurch den Arm emporziehenden Muskels (Deltoides). Wirkte dieser Muskel senkrecht am Arm, so müsste er schon über 33.25 = 825 ℔ Kraft anwenden, weil er aber unter einem sehr spitzen Winkel zieht, so muss die Kraft bedeutend grösser sein.

75.

Die Rolle. Eine kreisrunde, um eine senkrecht durch ihre Mitte gehende Achse, drehbare Scheibe, heisst eine Rolle. Um das Abgleiten eines darum gelegten Seils zu verhüten, ist der Rand etwas ausgehöhlt. Kann die rotirende Rolle sich nicht von der Stelle bewegen, so heisst sie eine feste Rolle, kann sie sich aber drehend und fortschreitend zugleich bewegen, so heisst sie eine lose Rolle.

76.



Aufgabe. An dem Ende des um eine feste Rolle gehenden Seils hängt eine Last Q. Wie gross muss die am andern Ende wirkende Kraft P sein, um das Gleichgewicht herzustellen?

Auflösung. Wirkt die Kraft P parallel mit Q, so hat man offenbar einen gradlinigten Hebel AB, dessen beide Arme gleich sind, und es muss also nothwendig auch P = Q sein. Wirkt die Kraft P nach der Richtung DE, so hat man einen gleicharmigen Winkelhebel und es muss also wiederum P = Q sein.

77.

Obgleich, wie man sieht, die Rolle nichts anders als ein (continuirlicher) Hebel ist, so ist es für die Beurtheilung des Gleichgewichts bei Rollen doch bequemer, auf die Spannung des um die Rolle gelegten Seils zu achten.

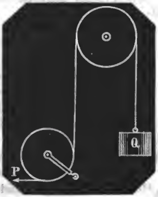
78.

Wenn nämlich das eine Ende eines Seils in einem Punct F befestigt ist und das andere Ende eine Last Q trägt, so



sagt man: das Seil hat eine Spannung = Q. Es ist klar, dass diese Spannung in jedem Punct und zwar nach entgegengesetzten Richtungen immer gleich gross ist, denn, in welchem Punct *a* man das Seil auch durchschnitten dächte, man brauchte doch immer eine der Last Q gleiche und entgegengesetzte Kraft, um das Gleichgewicht wieder herzustellen. Statt des festen Punctes F kann man eine der Last Q gleiche entgegengesetzte Kraft wirkend denken.

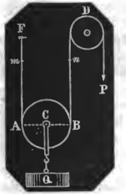
79.



Aus dem Begriffe der Spannung folgt nun ganz einfach, dass bei einer festen Rolle, im Zustande des Gleichgewichts, Kraft und Last immer gleich sein müssen, und dass eine feste Rolle immer nur als Leitrolle dient, um die Kraft P in jeder beliebig passenden Richtung wirken zu lassen. Sollte z. B. ein Pferd, welches unmittelbar nur nach horizontaler Richtung wirken kann, eine Last Q vertical in die Höhe ziehen, so könnte dies, wie Figura zeigt, vermittelst zweier festen Rollen (Leitrollen) bewirkt werden. Aus dem Begriffe der Spannung des Seils, die in allen Puncten nach entgegengesetzten Richtungen gleich ist, folgt ganz einfach, dass für den Zustand des Gleichgewichts, auch hier, wo das Seil um zwei (beliebig viele) feste Rollen geht, die Kraft P gleich der Last Q sein muss. Kurzum, durch eine feste Rolle kann nie an Kraft gewonnen werden. Dies kann nur durch lose Rollen geschehen.

80.

Aufgabe. An einer losen Rolle C hängt vermittelst eines Bügels eine Last Q. Um die Rolle ist ein Seil gelegt, dessen beide Enden parallel mit der Richtung der Last Q laufen. Das eine Ende ist in einem Punct F fest gemacht, das andere



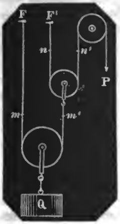
Ende geht über eine feste Rolle (Leitrolle D). Wie gross muss die der Last Q das Gleichgewicht haltende Kraft P sein?

Auflösung. Für den Zustand des Gleichgewichts ist das Seil in allen Puncten gleich gespannt. Denkt man sich das Seil in den Puncten *m* und *n* durchschnitten, so müsste, um das Gleichgewicht wieder herzustellen, in jedem Punct eine Kraft $= \frac{1}{2}$ Q wirken (§ 29). Das eine $\frac{1}{2}$ Q trägt der feste Punct F, das andere $\frac{1}{2}$ Q muss durch die gesuchte Kraft P im Gleichgewicht erhalten werden, folglich, weil D nur eine Leitrolle (feste Rolle) ist, $P = \frac{1}{2}$ Q sein.

Wollte man auf die Vorstellung und Theorie des Hebels zurückgehen, so muss man A B als einen einarmigen in A unterstützten Hebel betrachten. Bei der festen Rolle D hat man aber einen zweiarmigen Hebel, gradlinig oder gebrochen, je nachdem bei dieser die Seile parallel sind oder nicht.

Anmerkung. Denkt man sich die Kraft $P = \frac{1}{2}$ Q um ein wenig vergrössert, so würde Bewegung entstehen, die Kraft P dann aber auch einen mal so grossen Weg als die Last Q durchlaufen. Denn wenn die Rolle C z. B. 1 Fuss steigt, so müssen über die Leitrolle D offenbar 2 Fuss Seil laufen. Es bestätigt sich also auch hier das Princip der virtuellen Geschwindigkeit (§ 64).

81.



Aufgabe. Wie gross muss die Kraft P sein, welche vermittelst zweier fester Puncte F, F', und zweier losen Rollen einer Last Q das Gleichgewicht hält, vorausgesetzt, dass die tragenden Seile mit der Richtung der Last parallel laufen.

Auflösung. Nach vorhergehendem § ist die Spannung in *m* und *m'*, $= \frac{1}{2}$ Q und aus demselben Grunde in *n* und *n'*, $= \frac{1}{4}$ Q, mithin die gesuchte Kraft $P = \frac{1}{4}$ Q. (S. Anmerkg. § 80.) Vermittelst drei fester Puncte und drei loser Rollen könnte man die Last Q mit der Kraft $P = \frac{Q}{2^3}$ im Gleichgewicht erhalten.

82.

Erklärung. Zwei durch ein einziges Seil verbundene Rollensysteme, wovon das eine sich in einem festen Gehäuse (Flasche, Kloben), das andere aber in einem beweglichen Gehäuse befindet, mithin lose Rollen sind, nennt man einen Flaschenzug. (S. f. Figur.) Die Einrichtung kann übrigens sehr verschieden sein. Statt dass die Rollen jedes Systems sich unter einander befinden, können sie auch neben einander sein, und dann auch um eine gemeinschaftliche Achse sich drehen. Jedoch ist es vortheilhaft, wenn die tragenden Seile möglichst parallel mit der Richtung der Last laufen, welche an dem beweglichen Kloben befestigt ist.

83.



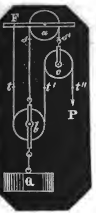
Aufgabe. Wie gross muss die Kraft P sein, um vermittelst eines Flaschenzugs, wie die Figur andeutet, einer Last Q das Gleichgewicht zu halten?

Auflösung. Für den Zustand des Gleichgewichts ist die Spannung des Seils in allen Puncten dieselbe, nämlich gleich der gesuchten Kraft P. Dächte man sich also die vier tragenden parallelen Seile in den angedeuteten Puncten durchschnitten, so wäre zur Erhaltung des Gleichgewichts in jedem der Durchschnittspuncte offenbar eine Kraft P erforderlich. Die Resultante dieser vier gleichen parallelen Kräfte, nämlich 4 P, muss nun gleich der Last Q sein (§ 36), daher $P = \frac{1}{4} Q$.

Anmerkung. Befänden sich in jedem der beiden Kloben drei Rollen, so wäre die zum Gleichgewicht erforderliche Kraft nur $= \frac{1}{6} Q$; kurzum, man findet bei solchen Flaschenzügen die zum Gleichgewicht nöthige Kraft, wenn man die Last durch die Anzahl der tragenden parallelen Seile dividirt.

84.

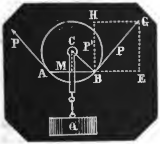
Aufgabe. Das eine Ende des Seils sei in F befestigt, *a* eine feste, *b* und *c* lose Rollen. Wie gross muss die zum



Gleichgewicht erforderliche Kraft P sein, wenn die Seile (auch das, woran P wirkt) mit der Richtung der Last Q parallel laufen.

Auflösung. Beachtet man, dass für den Zustand des Gleichgewichts die Spannung eines Seils, welches um eine Rolle läuft, in allen Puncten nach entgegengesetzten Richtungen gleich, also in den Puncten t, t' und $t'' = P$, folglich in s und $s' = 2\,P$, so wird die Last Q offenbar von 4 P getragen, und es muss also $P = \frac{1}{4} Q$ sein.

85.



Sind bei einer losen Rolle die Seile nicht, wie bisher vorausgesetzt, mit der Richtung der Last Q parallel, so kann man sich die Seile in den Puncten A und B, wo sie die Rolle tangiren, befestigt denken. Die gesuchten in den Puncten A und B angreifenden gleichen Kräfte P, P kann man jede in zwei zerlegen, eine $BE = S$ nach der Richtung der Sehne AB und die andere $BH = P'$ senkrecht darauf. Die Kraft $BE = S$ wird durch eine gleiche entgegengesetzte in A aufgehoben und kommt nicht weiter in Betracht. Setzt man $CB = r$, $AB = c$, so hat man (weil $\triangle\, CBM \sim \triangle\, BHG$):

$$P' : P = \tfrac{1}{2} c : r, \text{ woraus } P' = \frac{\frac{1}{2} c}{r} . P.$$

Da nun in A eine gleiche Kraft P' der Last Q entgegenwirkt, so muss für den Zustand des Gleichgewichts offenbar $2\,P'$, d. i. $\frac{c}{r}\,P = Q$ sein, mithin ist die gesuchte, an jedem Ende des Seils wirkende Kraft:

$$P = \frac{r}{c} . Q$$

d. h. die Kraft verhält sich zur Last, wie der Radius der Rolle zur Sehne des umspannten Bogens ($P : Q = r : c$). Je

kleiner die Sehne ist, je grösser muss P sein. Wäre die Sehne unendlich klein, so müsste P unendlich gross sein.

Denkt man sich die Last Q weg und die Rolle als feste Rolle, so würden die beiden gleichen Kräfte P, P auf die Achse einen Druck Q ausüben und es wäre dann:

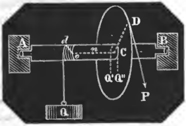
$$Q = \frac{c}{r} P.$$

Die Schlüsse bleiben hier, wegen der überall gleichen Spannung des Seils, dieselben, wenn das eine Ende des Seils in einem Punct befestigt ist.

86.

Rad und Welle. Ein horizontaler Cylinder AB, Welle genannt, ist mit einer kreisrunden Scheibe, Rad genannt, so verbunden, dass ihre Achsen eine gemeinschaftliche bilden, und also beide sich um diese gemeinschaftliche, in zwei Zapfenlagern ruhenden Achse zugleich drehen müssen.

87.



Aufgabe. An der Welle ist mittelst eines Seils, welches sich aufwickeln kann, eine Last Q befestigt. Wie gross muss die am Umfange des Rades nach der Richtung irgend einer Tangente (etwa vermittelst eines Seils) in entgegengesetzter Drehung wirkende Kraft P sein, um der Last Q das Gleichgewicht zu halten, wenn der Radius des Rades $CD = R$ und der der Welle $od = r$ ist?

Auflösung. Man denke sich noch am Umfange der Welle zwei der Last Q gleiche und parallele Kräfte Q', Q" angebracht, welche mit der Kraft P in einerlei Ebene liegen und die Welle im entgegengesetzten Sinne drehen, so ist dadurch nichts geändert. Die beiden gleichen entgegengesetzt wirkenden Kräfte Q und Q" kann man weglassen,*) und es ist

*) Will man noch strenger zu Werke gehen, so kann man statt der beiden gleichen verticalen, an entgegengesetzten horizontalen Radien wirkenden Kräfte Q, Q" ihre Resultante 2Q gesetzt denken,

dadurch der Angriffspunct der Last $Q = Q'$ nach einem andern Punct am Umfange der horizontalen Welle versetzt, wo sie noch dasselbe Drehungsbestreben hat. Beide Kräfte P und $Q' = Q$ wirken nun in einerlei Ebene an einem gradlinigten oder Winkelhebel, je nachdem ihre Richtungen parallel sind oder nicht. Für den Zustand des Gleichgewichts müssen also beide Drehmomente gleich sein, daher:

$$PR = Qr$$

$$P = \frac{r}{R} \cdot Q$$

Diese Maschine, Rad und Welle, ist also nichts anderes als ein Hebel, nur in anderer Form. Steht die Welle vertical, so bekommt sie wohl andere Namen (Erdwinde, Schiffswinde, Göpel, Haspel etc.), die Bedingungen des Gleichgewichts bleiben aber dieselben. Es verhält sich nämlich die Kraft zur Last, wie der Radius der Welle zum Radius des Rades, $P : Q = r : R$. Wäre z. B. $Q = 600$ ℔, $r = 6''$ und $R = 3'$, so wäre $P = \frac{6}{36} \cdot 600 = 100$ ℔. Würde P ein wenig grösser genommen, so würde die Last Q (von der Reibung abstrahirt) gehoben werden, also sich auch bei dieser Maschine das Princip der virtuellen Geschwindigkeit zeigen (§ 64).

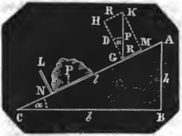
88.

Schiefe Ebene. Eine Ebene, welche unter einem beliebigen Winkel α gegen den Horizont geneigt ist (Geometrie § 205), heisst eine schiefe Ebene. Seien CA und CB (s. f. Fig.) die Schenkel des Neigungswinkels, so stellen diese die verticalen Durchschnitte (Profile) der schiefen und horizontalen Ebene dar. Fällt man von einem beliebigen Punct A auf den horizontalen Schenkel das Perpendikel AB, so heisst AB die Höhe, BC die Basis und AC die Länge (auch wohl Rücken) der schiefen Ebene. Sind zwei von diesen Grössen gegeben, so ist die dritte und dadurch auch die Neigung der schiefen Ebene bestimmt.

89.

Aufgabe. Auf den Rücken einer festen schiefen Ebene drückt, vermittelst einer Stange, eine Kraft $P = KG = 160$ ℔.

deren Angriffspunct n in die geometrische Achse der Welle fällt und die also keine Drehung, sondern nur einen Druck auf die festen Zapfenlager ausübt.



nach verticaler Richtung. Welchen Druck D hat die schiefe Ebene auszuhalten, und mit welcher Kraft R ist der untere Punct G der Stange (der, um von der Reibung abstrahiren zu können, eine Rolle sein möge), bestrebt, die schiefe Ebene hinunter zu gleiten, wenn $AC = l = 20'$, $AB = h = 10'$ und folglich $BC = b = \sqrt{20^2 - 10^2} = 17{,}3$..

Auflösung. Die verticale Kraft $P = KG$ zerlegen wir in die beiden Composanten $HG = D$ und $MG = R = (HK)$, wovon erstere normal auf die schiefe Ebene wirkt und deshalb durch deren Widerstand aufgehoben wird (§ 15), die andere aber $MG = R$ in der Richtung der schiefen Ebene wirkt und den Punct G hinunter treibt.

Das Dreieck HGK, dessen Seiten die Kräfte P, D, R darstellen, ist ähnlich dem Dreieck ABC (weil $\widehat{KGM} = \widehat{GAB}$ als Wechselwinkel und $\widehat{M} = \widehat{H} = \widehat{B}$ 90° ist), daher:*)

$$\left.\begin{array}{l} R : P = h : l \\ D : P = b : l \end{array}\right\} \text{ woraus: } \left\{\begin{array}{l} R = \frac{h}{l} \cdot P \\ D = \frac{b}{l} \cdot P \end{array}\right.$$

für das angenommene Zahlenbeispiel wäre also $R = \frac{10}{20} \cdot 160 =$ 80 ℔. und $D = \frac{17{,}3}{20} \cdot 160 = 138{,}4$ ℔.

Dieselben Wirkungen, welche hier die vertical gerichtete Kraft P auf die schiefe Ebene ausübt, würde offenbar auch ein darauf liegender schwerer Körper, dessen Gewicht = P ist, ausüben. Der Körper, dessen Gewicht = P man sich im Schwerpunct vereint denken kann, würde nämlich (von der Reibung abstrahirt) von einer Kraft $R = \frac{h}{l}$ P hinunter getrieben werden und dabei fortwährend mit einer Kraft $D = \frac{b}{l}$ P normal auf die schiefe Ebene drücken.

*) Es ist auch: $R = P \cdot \sin \alpha$
und $D = P \cdot \cos \alpha$

90.

Erklärung. Die Kraft R, mit welcher ein Körper eine schiefe Ebene hinunter zu gleiten bestrebt ist, und mit welcher er also auch gegen eine auf seine Bewegungsrichtung senkrechte Ebene LN drücken würde, wird in der Kunstsprache das respective Gewicht genannt, im Vergleich zu seinem sogenannten absoluten Gewicht P, mit welchem derselbe Körper auf eine horizontale Ebene drückt. Es verhält sich also das respective Gewicht eines Körpers zu seinem absoluten Gewicht, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge, $R : P = h : l$.

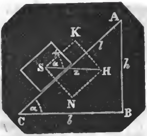
Wollte man einen Körper auf einer schiefen Ebene im Gleichgewicht erhalten, so brauchte die dazu erforderliche Kraft, wenn ihre Richtung durch den Schwerpunct geht und parallel mit der schiefen Ebene wirkt, nur so gross, als das respective Gewicht des Körpers zu sein. Nähme man die Kraft ein wenig grösser, so würde sie den Körper, z. B. von C aus, die schiefe Ebene hinauf, z. B. bis A, bewegen. Es ist dann aber klar, dass so viel mal die Kraft R kleiner, als die Last P ist, so viel mal ist dann umgekehrt der von der Kraft durchlaufene Weg CA grösser als die Höhe AB, auf welche die Last wirklich gehoben worden, so dass also auch bei dieser einfachen Maschine das allgemeine Princip der virtuellen Geschwindigkeit Statt findet.

Eine schiefe Ebene kann man sich offenbar auch gewunden denken, z. B. um einen verticalen Thurm (Berg etc.), auf welchen schwere Sachen, in einem Wagen gezogen, gebracht werden sollen, wobei ihre Neigung (Schiefe) gegen den Horizont nicht geändert wird.

91.

Aufgabe. Wie gross muss die parallel mit der Basis wirkende Kraft $SH = z$ sein, um einen Körper, dessen Gewicht $= P$ ist, auf der schiefen Ebene im Gleichgewicht zu erhalten, wenn wieder $CA = l$, $AB = h$, $BC = b$?

Auflösung. Die gesuchte Kraft $SH = z$ zerlegen wir in die beiden SN und SK, erstere, senkrecht auf der schiefen Ebene, trägt nichts zur Erhaltung des Gleichgewichts bei,



sondern vergrössert nur den Druck, welchen der Körper schon von selbst auf die schiefe Ebene ausübt, die andere $SK = x$ aber, parallel mit dem Rücken, muss mit dem respectiven Gewicht $R = \frac{h}{l} P$, mit welchem der Körper hinunter zu gleiten bestrebt ist (§ 89) im Gleichgewicht sein. Da nun $\triangle SKH \sim \triangle ABC$, so ist:

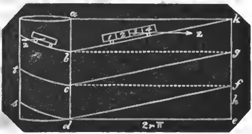
$$x : z = b : l, \text{ woraus: } x = \frac{b}{l} \cdot z.$$

Für das Gleichgewicht muss also sein: $\frac{b}{l} z = \frac{h}{l} P$, woraus:

$$z = \frac{h}{b} \cdot P$$

In Worten: die Kraft verhält sich zur Last, wie die Höhe der schiefen Ebene zur Basis ($z : P = h : b$).

92.



Schraube. Sei *adek* die abgewickelte Seitenfläche eines graden Cylinders, und dieselbe in eine beliebige Anzahl gleicher Rechtecke getheilt, darin die Diagonalen df, cg,... gezogen und dann wieder um den Cylinder gewickelt, so bilden die Diagonalen auf der Oberfläche des Cylinders eine einzige krumme Linie, welche man Schraubenlinie nennt. Die zusammenhängenden Theile dieser Linie, welche jede einzelne Diagonale beschreibt, wie *dsc*, *ctb*,.. (die Hälften sind nur sichtbar) heissen Schraubengänge (Windungen) und $cd = bc = ..$ die Höhe der Schraubengänge.

Denkt man sich, nach dem Laufe der Schraubenlinie, eine schiefe Ebene (einen prismatischen Körper, s. f Figur) um den Cylinder gewickelt, so bildet der Cylinder mit seinen

Hervorragungen die sogenannte Schraubenspindel. Die obere oder untere hervorragende Fläche (die umgewundene schiefe Ebene) heisst Schraubenfläche.

93.

Denkt man sich die Spindel vertical und auf der Schraubenfläche einen Körper, dessen Gewicht = P, gelegt, so würde ganz dasselbe Statt finden, als wenn der Körper auf der nicht gewundenen schiefen Ebene *bk* läge, er würde nämlich (von der Reibung abstrahirt) hinunter gleiten, ob der Körper lang oder kurz ist, d. h. ob der Körper den Cylinder zum Theil, ganz oder auch mehrmals umgiebt (auf mehren Gängen liegt), weil jeder einzelne Theil 1, 2, 3, 4, vermöge seines respectiven Gewichts, sich in Bewegung setzt und, sich um den Cylinder drehend, hinunter gleitet.

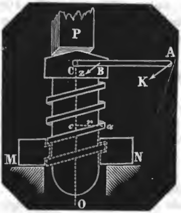
Um ihn durch eine horizontal wirkende Kraft z im Gleichgewicht zu erhalten, hat man, die Höhe eines Schraubenganges = h, den Radius des Cylinders = r gesetzt, für die fragliche horizontale Kraft z offenbar die schon § 91 für diesen Zweck abgeleitete Formel:

$$z = \frac{h}{2 r \pi} \cdot P$$

Denkt man sich nun noch einen zweiten Körper MN cylindrisch durchbohrt, und die innere (cylindrische) Fläche nach derselben Schraubenlinie so ausgehöhlt, dass die Schraubenspindel hineinpasst, sich hineindrehen (schrauben) lässt (s. f. Figur), so heisst dieser zweite Körper die Schraubennuss und beide zusammen, Nuss und Spindel, bilden die Schraube. Ist die Spindel fest und vertical, so muss nach dem Vorhergehenden die Nuss (von der Reibung abstrahirt) von selbst anfangen sich herunter zu drehen und umgekehrt, liegt die Nuss fest, so würde die Spindel sich von selber hindurch drehen.

94.

Aufgabe. Es sei die Nuss fest, das Gewicht der verticalen Spindel sammt der auf ihrem Kopf liegenden Last P = 6000 ℔. Die Höhe eines Schraubenganges $h = 1''$. Der durch den Kopf gesteckte Hebelarm AC = R = 2′ 6″. Wie



gross muss die horizontal und rechtwinklig an A C wirkende Kraft K sein, um das Gleichgewicht zu halten?

Auflösung. Die Spindel dreht sich (gleichsam wie Rad und Welle) um die Achse CO. Ist nun der Radius der Spindel (von der Achse bis zur Mitte der Hervorragung gemessen) $ac = BC = r$, so hätte man für die zum Gleichgewicht erforderliche horizontal und rechtwinklig am Hebelarm ac oder CB wirkende Kraft z die schon § 93 aufgestellte Formel:

$$z = \frac{h}{2 r \pi} \cdot P$$

So viel mal nun aber der Hebelarm $AC = R$ grösser ist als $BC = r$, so viel mal ist die Kraft K kleiner als z, daher:

$$K = \frac{r}{R} \cdot \frac{h}{2 r \pi} \cdot P, \text{ mithin:}$$

$$K = \frac{h}{2 R \pi} \cdot P$$

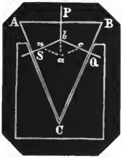
In Worten: es verhält sich die Kraft zur Last, wie die Höhe eines Schraubenganges zu dem Umfange des Kreises, welchen die Kraft bei einer ganzen Umdrehung durchlaufen müsste. $K : P = h : 2 R \pi$, so dass also auch hier wieder das Princip der virtuellen Geschwindigkeit Statt findet. Für die angenommenen Zahlen ist hier ($\pi = 3\frac{1}{7}$):

$$K = \frac{1}{2 . 30} \cdot \frac{7}{22} \cdot 6000 = 31\tfrac{9}{11} \text{ ℔.}$$

Nähme man K etwas grösser, so würde die Last P gehoben, oder statt dessen ein ihr gleicher Druck mit dem Kopf der Schraube, und zwar nach jeder Richtung, auf einen Widerstand ausgeübt werden können, weil die Spindel statt in eine verticale auch in jede andere Lage gebracht werden kann.

Anmerkung. Wie man sieht, kommt in vorstehender Formel der Radius der Spindel gar nicht in Betracht, weil es einerlei ist, ob man eine schiefe Ebene um einen dünnen oder dicken Cylinder windet, die Neigung der Schraubengänge bleibt dieselbe.

95.



Der Keil. Ein grades dreiseitiges Prisma von geringer Höhe, dessen man sich zum Pressen oder auch zum Spalten (Trennen) der Körper bedient, wird Keil genannt. Die obere rechteckige (hier nur im Profil erscheinende) Seitenfläche AB heisst der Rücken und die beiden andern rechteckigen Seitenflächen AC, BC heissen die Seiten des Keils.

96.

Aufgabe. Senkrecht auf den Seitenflächen eines Keils wirken drei Kräfte P, Q, S, deren Richtungen in einem und demselben Punct b zusammen treffen. Man frägt, in welcher Beziehung für den Zustand des Gleichgewichts die drei Kräfte zu den Längen des Rückens und den Seiten des Keils stehen?

Auflösung. Es stelle ba die Kraft P dar. Zerlegt man dieselbe, nach dem Kräftenparallelogramm, in zwei andere bc und bn, so stellt (weil für das Gleichgewicht die Kraft P gleich der Resultante von Q und S sein muss) bc die Kraft Q und bn die Kraft S dar. Da nun $ac = bn =$ S und wie leicht einzusehen: $\triangle\, abc \backsim \triangle$ ABC, so hat man: $ab : bc : ac =$ AB : BC : AC, d. i.

$$P : Q : S = AB : BC : AC,$$

d. h. die drei Kräfte verhalten sich grade so, wie die Seiten, auf welche sie wirken.

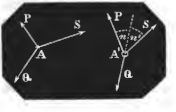
Eine auf den Rücken des Keils wirkende Kraft P (ein Schlag, Druck) ist bestrebt, den Keil nach der Richtung ba fortzutreiben, wobei dessen Seiten auf die Flächen des zu spaltenden Körpers mit den Kräften Q, S (Stoss, Druck) normal wirken. Wäre die Seite BC sechs mal so lang, als der Rücken AB, so wäre $Q = 6P$. Ist der Keil, wie gewöhnlich, ein gleichschenkliger AC = BC, so ist S = Q und

$$P : Q = AB : BC.$$

Je kleiner der Winkel C, je grösser ist offenbar die Wirkung des Keils. Man sieht aber auch, dass hier wieder das Princip der virtuellen Geschwindigkeit Statt findet, und

dass man den Keil als eine schiefe Ebene betrachten kann. Ein Keil kann auch eine Pyramidenform haben, z. B. drei- oder vierkantige Nägel.

97.

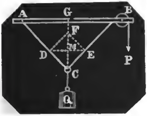


Das Seil. Die vollständige Theorie der sogenannten Seilmaschine, welche hauptsächlich in der Baukunst, beim Gewölbe- und Brückenbau Anwendung findet, wird in eigenen Werken darüber mit abgehandelt. Für die eigentliche Maschinenkunde genügt es, sich nur Folgendes zu merken:

Wenn drei Seile in einem Puncte A so mit einander verbunden sind, dass der Verbindungspunct nicht gleiten kann, so heisst derselbe ein fester Knoten, kann er aber gleiten, so heisst er ein loser Knoten. Ein solcher ist z. B. A', wo ein Seil durch die Schleife oder Ring eines andern Seils geht. Wirken an den Enden der Seile drei Kräfte P, Q, S, so ist klar, dass für den Zustand des Gleichgewichts, in beiden Fällen, jede der drei Kräfte P, Q, S nothwendig gleich der Resultante der beiden andern sein muss, und dass alle drei Seile nothwendig in einer und derselben Ebene liegen müssen. Beim losen Knoten ist aber ausserdem noch nothwendig, dass $S = P$ ist, und dass die Richtung der Kraft Q den Winkel bei A' halbirt ($\widehat{n} = \widehat{n'}$). Denn das durch den Ring gehende Seil muss, damit es nicht gleitet (ebenso, als wenn es um eine Rolle ginge), in allen Puncten gleiche Spannung haben, daher $S = P$. Die Resultante von den beiden gleichen Kräften P, P wird aber durch die Diagonale eines gleichseitigen Parallelogramms dargestellt, welche den Winkel bei A' halbirt.

98.

Aufgabe. Das eine Ende eines vollkommen biegsamen Seiles ist in A befestigt. Das andere Ende geht durch einen losen Knoten C und über eine feste Rolle B. An dem losen Knoten hängt eine vertical wirkende Last $Q = 24$ ℔. Wie gross muss die zum Gleichgewicht erforderliche Kraft P sein, wenn die Länge der horizontalen Linie $AB = a = 6'$ und



die Länge des Seils $AC + CB = l = 10'$ ist.

Auflösung. Da die Spannung des Seils, wegen des losen Knotens, in allen Puncten gleich ist, so wird der Winkel ACB halbirt, ferner ist $CB = \frac{1}{2} l$, $GB = \frac{1}{2} a$, $CG = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - a^2}$. Stellt nun die Linie CF die Last Q dar, so ist $CD = CE = P$, $CM = \frac{1}{2} Q$ und man hat nun $CE : CM = CB : CG$, oder:

$$P : \tfrac{1}{2}Q = \tfrac{1}{2}l : \tfrac{1}{2}\sqrt{l^2 - a^2}$$

$$P = \frac{\frac{1}{2}l}{\sqrt{l^2 - a^2}} \cdot Q$$

Für das angenommene Zahlenbeispiel findet man $P = 15$ ℔. Man sieht, je kleiner der Nenner $\sqrt{l^2 - a^2}$ wird, oder was dasselbe ist, je weniger der Abstand der Puncte A und B (durch Verschieben der Rolle B) von der Länge des Seils verschieden ist, je grösser wird die Kraft P, oder die Spannung des Seils, und dass selbst ein noch so kleines Gewicht Q einem beliebig viel mal grössern Gewicht P das Gleichgewicht halten könnte, wenn das Seil die grosse Spannung ertrüge. Würde $a = l$, so müsste offenbar $P = \infty$ sein. Es geht hieraus hervor, dass, strenge genommen, schon vermöge seines eigenen Gewichts, ein Seil, ausser in verticaler, in keiner horizontalen noch in einer andern Richtung ganz grade gespannt werden kann. Man denke sich die Rolle B in irgend einen andern (niedrigern) Punct in der Richtung CB angebracht (vergl. § 123).

Fünftes Buch.

Zusammengesetzte Maschinen.

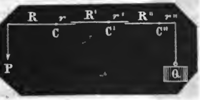
99.

Die im Vorhergehenden erklärten drei (sieben) einfachen Maschinen: Hebel (Rolle, Rad und Welle), schiefe Ebene (Schraube, Keil) und Seil, sind nun, wie schon erwähnt, die Bestandtheile oder Organe einer jeden andern noch so complicirten. Es giebt deren nämlich merkwürdigerweise keine, weder jetzt noch künftig, die nicht eine blosse Combination aus jenen einfachen wäre. So wie sich aber durch verschiedene Verbindungen der vierundzwanzig Buchstaben des Alphabets eine Unzahl von Gedichten, durch verschiedene Verbindungen der sieben Töne in der Musik eine Unzahl von Melodien ausdrücken lassen, so können auch auf die mannichfaltigste Weise jene einfachen Maschinen zu einer zahllosen Menge neuer zusammengesetzten Maschinen verbunden werden. Es kömmt nur darauf an, irgend eine sinnreiche Combination zu erdenken, was aber offenbar reine Sache der Phantasie und des Scharfsinns ist. So ist z. B. die gewiss sinnreiche Schraube schon eine aus Hebel und schiefer Ebene zusammengesetzte Maschine. Die noch sinnreichere Uhr besteht fast nur aus lauter Hebeln.

100.

Wer nun die Theorie der einfachen Maschinen gut begriffen hat, der wird auch im Stande sein, die Construction einer jeden zusammengesetzten Maschine, was nämlich ihren Mechanismus, d. h. das Ineinandergreifen ihrer Organe betrifft, richtig zu beurtheilen, indem er die Wirkung des ersten Organs, an welchem die Kraft wirkt, durch alle Zwischenglieder hindurch, bis zum letzten, wo die Last wirkt oder auch umgekehrt verfolgt, was, wie wir hier an ein paar Beispielen zeigen wollen, immer durch eine Reihe von eben so vielen einfachen Proportionen (Gleichungen), als Organe da sind, geschehen kann.

101.



Aufgabe. Vermittelst dreier in C, C', C'' unterstützten zweiarmigen Hebel, deren Arme R, r; R', r'; R'', r'' sind, soll eine senkrecht an r'' wirkende Last Q im Gleichgewicht erhalten werden. Wie gross muss die dazu erforderliche rechtwinklig an R wirkende Kraft P sein?

Auflösung. Denkt man sich das Gleichgewicht hergestellt, so übt die Last Q einen senkrechten Druck x auf den Hebelarm r' aus. Denselben Druck x übt aber auch der Hebelarm r' in entgegengesetzter Richtung auf den Hebelarm R'' aus, weil ja sonst kein Gleichgewicht vorhanden wäre. Zur Bestimmung der Wirkung x hat man also die einfache Gleichung (§ 62):

$$xR'' = Qr'' \ldots\ldots\ldots (1)$$

Die Kraft x übt wiederum auf den Hebelarm r einen Druck y aus, und mit derselben Kraft y reagirt der Hebelarm r auf den Hebelarm R'. Da nun y mit x im Gleichgewicht sein muss, so hat man:

$$yR' = xr' \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Mit der Kraft y muss P im Gleichgewicht sein, daher:

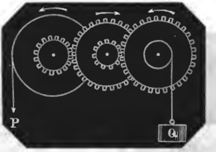
$$PR = yr \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen mit einander, indem man beiderseits den gemeinschaftlichen Factor xy weglässt, so ist $PRR'R'' = Qrr'r''$, woraus:

$$P = \frac{rr'r''}{RR'R''} \cdot Q$$

Zur Bewegung der Last Q würde offenbar ein solches Hebelwerk nicht geeignet sein, weil die Hebelarme von einander abgleiten. Deshalb kam ein nachdenkender Mensch auf den vernünftigen Einfall, diesen Zweck durch eine kleine Abänderung der Form zu erreichen, und ersann so, wohl durch die Erinnerung an Rad und Welle geleitet, das Räderwerk.

102.

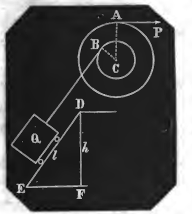


Versieht man nämlich die Umfänge eines Systems von Rädern sammt ihren Wellen (ausgenommen das Rad, woran die Kraft, und die Welle, woran die Last wirkt) mit sogen. Z ä h n e n, welche man als von den Mittelpuncten ausgehende Hebelarme betrachten kann, und ordnet dasselbe so, dass bei freier Drehung die Zähne gehörig in einander greifen, so hat man das R ä d e r w e r k, welches also nichts anders als ein Hebelwerk ist, insofern es nur darauf ankömmt, das Verhältniss der Kraft zur Last aus den Radien der Räder und der Wellen für den Zustand des Gleichgewichts nach § 101 zu bestimmen.

Ein solches System von gezähnten Rädern kommt in sehr verschiedener Form vor. Statt dass z. B. die Zähne (bei den Wellen auch wohl Triebstöcke genannt) radial ausgehen (Stirnräder), können sie auch senkrecht auf den Radien stehen (Kronräder), und endlich die Räder auch die Kegelform haben (conische Räder).

103.

Aufgabe. Wie gross muss die Kraft P sein, welche vermittelst Rad und Welle und einer schiefen Ebene der Last



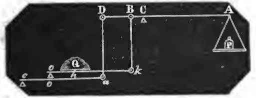
$Q = 2800$ ℔ das Gleichgewicht hält? Das Seil BQ geht parallel mit dem Rücken der schiefen Ebene und es ist $DF = h = 10'$, $DE = l = 20'$, $CB = r = 4''$, $CA = R = 2'4''$.

Auflösung. Das am Hebelarm CB wirkende respective Gewicht von Q ist (§ 89) $= \frac{h}{l}$ Q. Daher für den Zustand des Gleichgewichts $P \cdot R = \frac{h}{l} Q \cdot r$, woraus:

$$P = \frac{r}{R} \cdot \frac{h}{l} \cdot Q$$

$$P = 200 \text{ ℔}$$

104.



Aufgabe. Auf einem in c unterstützten einarmigen Hebel ac liegt der Stützpunct o eines zweiten einarmigen Hebels ko. Beide Endpuncte a und k sind durch Stangen mit einem dritten in C unterstützten zweiarmigen Hebel verbunden. In A hängt eine Waagschale, und das ganze Hebelsystem ist so eingerichtet, dass es für sich im Gleichgewicht ist. Alle drei Hebel sind horizontal und die Verbindungsstangen darauf rechtwinklig. Nun wird auf den Hebel ko (die sogen. Brücke) eine Last Q gelegt. Man frägt, wie sich aus den Verhältnissen der Hebelarme das zur Wiederherstellung des Gleichgewichts in die Waagschale zu legende Gewicht P bestimmen lässt.

Auflösung. Die Last Q kann in dem vertical unter ihrem Schwerpunct liegenden Punct h angenommen werden. Die Drücke x und y, welche Q auf die Puncte o und k ausübt, findet man leicht nach § 68, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot ok = Q \cdot hk \\ y \cdot ok = Q \cdot oh \end{array}\right\} \text{ woraus: } \left\{\begin{array}{l} x = \frac{hk}{ok} \cdot Q \\ y = \frac{oh}{ok} \cdot Q \end{array}\right.$$

Heisst z der durch x auf den Punct a verursachte Druck, so ist $z \cdot ac = x \cdot oc$; woraus:

$$z = \frac{oc}{ac} \cdot x = \frac{oc}{ac} \cdot \frac{hk}{ok} \cdot Q$$

Die fragliche Kraft P muss nun mit den in a und k, d. i. in D und B wirkenden Kräften z und y im Gleichgewicht sein, daher:

$$P \cdot AC = \frac{oc}{ac} \cdot \frac{hk}{ok} \cdot Q \cdot CD + \frac{oh}{ok} \cdot Q \cdot BC$$

$$P \cdot AC = \frac{Q}{ok}\left(\frac{oc}{ac} \cdot CD \cdot hk + oh \cdot BC\right)$$

Nimmt man, um diese Formel practisch nützlich zu machen, das Verhältniss der Hebelarme oc und ac so: dass $\frac{oc}{ac} = \frac{BC}{CD}$, mithin: $\frac{oc}{ac} \cdot CD = BC$, so ist:

$$P \cdot AC = \frac{Q}{ok}(BC \cdot hk + oh \cdot BC) \text{ oder}$$

$$P \cdot AC = \frac{Q \cdot BC}{ok}(hk + oh) = Q \cdot BC \cdot \frac{ok}{ok}$$

$$P = \frac{BC}{AC} \cdot Q$$

Durch diese gemachte Annahme der Hebelarme ist nun der merkwürdige Umstand herbeigeführt, dass die Lage des Schwerpuncts, oder das Verhältniss von oh und hk, bei dieser Waage gar nicht berücksichtigt zu werden braucht (d. h. die Last Q kann also irgendwo auf der Brücke liegen), und indem der erste Erfinder, Quintenz, bei dieser, hier nur im Profil gezeichneten, sogenannten Brückenwaage noch das Verhältniss von BC : AC = 1 : 10 annahm, was ihm wiederum völlig frei stand, hatte er damit auch die für Handel und Fabrikwesen jetzt so nützliche sogenannte Decimalwaage erfunden. Man braucht nämlich nur, um das Gewicht Q der an einer beliebigen Stelle auf die Brücke geworfenen Waare zu erhalten, das auf der Waagschale liegende Gewicht mit

10 zu multipliciren, oder statt dessen die zum Wägen nöthigen Gewichtsstücke statt mit 1, 2, 3....½, ¼ etc. mit 10, 20, 30...5, 2½ etc. zu bezeichnen.

105.

Die vorhergehenden paar Beispiele über zusammengesetzte Maschinen werden genügen, um einzusehen, dass man die Wirkung der einzelnen in einander greifenden Organe vom ersten bis zum letzten, oder auch umgekehrt, durch die ganze Maschine hindurch mittelst einfacher Proportionen verfolgen kann.

Ein ganz Anderes ist es aber, wenn man zugleich auch beurtheilen will, ob die eine Maschine in Bewegung setzende Kraft auf die vortheilhafteste Weise, d. h. so benutzt und die Maschine selbst so construirt, der Kraft so angepasst ist, dass sie den grösstmöglichsten Effect äussert. Man kann z. B. fragen, welche Stellung, Form und Grösse die Flügel einer Windmühle, die Flügel einer Schiffsschraube haben müssen, damit der Wind, der Widerstand des Wassers, am vortheilhaftesten darauf wirkt; welches die beste Stellung und Grösse der Schaufeln an einem Wasserrade ist; wie die Zähne an einem Räderwerk geformt sein müssen, damit die immer schädlichen Stösse und Reibungen möglichst vermieden werden etc. etc. Solche und ähnliche Fragen kann aber offenbar die Theorie der einfachen Maschinen nicht beantworten. Hier müssen die reine Mechanik, oft auch Experimente zu Hülfe kommen, und diese haben denn bereits auch alle beide ihre bis jetzt gefundenen Resultate in vielen umfangreichen Werken und Zeichnungen (Maschinen-Constructionslehre) niedergelegt.

Sechstes Buch.

Von der Reibung.

106.

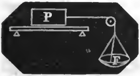
Bei unsern bisherigen Betrachtungen der Maschinen haben wir das Verhältniss der Kraft zur Last immer nur für den Zustand des Gleichgewichts bestimmt. Soll aber die Kraft bestimmt werden, welche eine gewisse Bewegung hervorbringt, wie es später in der Dynamik vorkommen wird, so müssen noch die aus den physischen Eigenschaften der Körper entspringenden Hindernisse, welche sich der Bewegung entgegensetzen, mit in Rechnung gezogen werden. Eins dieser Hindernisse bei der Bewegung eines festen Körpers, der auf einem andern ruht (z. B. ein Körper auf einer schiefen Ebene, die Achse in den Zapfenlagern etc.), ist dasjenige, welches man mit dem Namen Reibung (Friction) bezeichnet, und welche theils aus der Adhäsion (Flächenanziehung), grösstentheils aber von der Unebenheit der Körper herrührt, indem selbst bei den bestpolirten doch immer noch kleine Erhöhungen und Vertiefungen in einander greifen, so dass der bewegliche Körper von seiner Unterlage gleichsam festgehalten wird und sowohl beim Gleiten als beim Umdrehen erst losgerissen werden muss. Die Reibung kann also als eine Kraft betrachtet werden, welche der Bewegung entgegen und parallel mit der Berührungsfläche wirkt Dass eine solche Kraft unter Um-

ständen bedeutend sein kann, sieht man daraus, dass ein Schiff durch die blosse Reibung eines Seils, welches nur ein paar mal, und selbst ohne Knoten, um einen Pfahl gewickelt ist, gehalten wird.

107.

Man unterscheidet zweierlei Arten Reibung: 1) die gleitende, wenn ein Körper auf seiner Unterlage fortgezogen oder geschoben wird und wozu auch die Zapfen- oder drehende Reibung gehört, und 2) die rollende oder wälzende Reibung, wenn ein Cylinder (Rad) auf seiner Unterlage fortrollt, und welche hauptsächlich in der Theorie des Fuhrwerks in Betracht kömmt. Wir wollen hier zuerst die für die gleitende Reibung aufgefundenen allgemeinen Gesetze mittheilen.

108.



1) Die gleitende Reibung ist dem Drucke proportional. Dieses Gesetz fand Coulomb*) durch folgende einfachen Experimente bestätigt.

Auf einer festen horizontalen Ebene liegt ein Körper, ebenfalls mit ebener Grundfläche, und dessen Gewicht = P. Dieser verticale Druck P wird durch den Widerstand der horizontalen Ebene aufgehoben. Der Körper ist also vollkommen im Gleichgewicht, und es müsste nun, wenn es keine Reibung gäbe, ein noch so kleines Gewicht, welches vermittelst einer Leitrolle nach horizontaler Richtung wirkt, denselben in Bewegung setzen. Die Erfahrung lehrt nun aber, dass, je nach der Materie, woraus die sich an einander reibenden Körper bestehen (Eisen, Kupfer, Holz etc.), hier immer ein merklicher Widerstand (Reibung) zu überwinden ist, und welcher stets dem Drucke proportional wächst. Wären z. B. die sich berührenden Flächen von Eisen, der Druck P = 20 ℔., und man müsste in die Waagschale 6 ℔. legen (das Gewicht der Waagschale mit eingerechnet), um das Gleichgewicht auf den sogenannten Punct der Unterbrechung zu bringen,

*) Théorie des machines simples (1779). Diese Preisschrift wurde mit dem doppelten Preise gekrönt.

d. h. dass nun durch die kleinste Vergrösserung der Kraft 6 ℔, z. B. um 1 Loth, der Körper sich wirklich bewegen müsste, so würde er auch durch Weglassung von etwas mehr als diese gedachte Vergrösserung (1 Loth) bald wieder in Ruhe kommen, weil ja stets die Reibung mit der Kraft von 6 ℔, als ihr Maass, im Gleichgewicht ist.

Vergrössert man durch Auflegung verschiedener Gewichte den Druck auf die Unterlage, legt man z. B. noch 40 ℔ auf, so dass also der Druck jetzt drei mal so gross, nämlich $40 + 20 = 60$ ℔, so zeigt sich, dass jetzt auch die Reibung dreimal so gross, nämlich 18 ℔ ist. Diese Kraft von 18 ℔ würde nämlich das Gleichgewicht des Körpers wieder auf den Punct der Unterbrechung bringen, und, um noch so wenig vergrössert, ihn in Bewegung setzen etc. Wird der Druck n mal so gross, so wird auch die Reibung n mal so gross.

109.

Weil die Kraft der Reibung dem Drucke proportional, mithin immer ein bestimmter Theil davon ist, so muss auch, wenn man die Grösse der Reibung (Friction) mit F bezeichnet und durch den Druck P dividirt, der entstehende echte Bruch, welcher Reibungscoefficient heisst und mit f bezeichnet wird, für eine bestimmte Materie immer derselbe sein. In vorstehendem Beispiel ist er z. E. $\frac{6}{20} = \frac{18}{60} = \frac{3}{10}$. Allgemein:

$$\frac{F}{P} = f, \text{ woraus: } F = f \, . \, P,$$

d. h. man erhält die Grösse der Reibung F, wenn man den Druck P mit dem Reibungscoefficienten f multiplicirt. Wäre z. B. für Eisen auf Eisen der Reibungscoefficient $f = \frac{3}{10}$ und der Druck $P = 2000$ ℔, so wäre die Kraft der Reibung $F = 600$ ℔. Wir werden in § 112 einige Reibungscoefficienten für die in der Praxis am häufigsten vorkommenden Materialien mittheilen.

110.

2) Die Reibung ist unabhängig von der Grösse der reibenden Fläche.

Dieses Gesetz folgt schon aus dem ersten. Man denke sich zwei Körper aus demselben Material von gleicher Reibungsfläche und gleichem Gewicht auf einer horizontalen Ebene liegend. Die Grösse der Reibung betrage bei jedem

Körper z. B. 1 ℔, so würde die Reibung für beide Körper als einen gedacht (zwei Seitenflächen an einander geleimt), offenbar = 2 ℔ sein. Dies würde aber auch der Fall sein, wenn statt dessen der eine Körper auf den andern gelegt wird, indem dann die halb so grosse Reibungsfläche mal so stark drückt. Es versteht sich bei diesem Gesetze aber von selbst, dass die Reibungsfläche nicht so schmal sein darf, dass sie in die Unterlage einschneidet oder mit Spitzen darauf ruht.

111.

3) Die Reibung ist unabhängig von der Geschwindigkeit, mit welcher der Körper sich bewegt.

Dies Gesetz wurde (wenn wir nicht irren) zuerst von Rumford mittelst einer Zeigerwaage entdeckt, welche an die Schnur, mit welcher der Körper gezogen wurde, gehörig angebracht war. Der Zeiger blieb auf demselben Punct stehen, der Körper mochte rasch oder langsam fortgezogen werden.

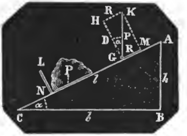
112.

Reibungsflächen:	Reibungscoefficient:
Eisen auf Eisen	$\frac{3}{10}$
Eisen auf Kupfer oder umgekehrt	$\frac{3}{17}$
Eisen auf Messing oder umgekehrt	$\frac{4}{15}$
Eichen auf Eichen, wenn die Fasern parallel laufen	$\frac{3}{7}$
und wenn sie sich kreuzen	$\frac{3}{10}$

Man sieht hieraus, dass bei gleicher Politur die Reibung bei gleichartigen Körpern grösser ist, als bei ungleichartigen, deshalb lässt man auch eiserne (stählerne) Achsen in bronzene Lager laufen. Die Reibungscoefficienten können nur als Mittelwerthe betrachtet werden, weil die Reibung von so vielen Umständen (Temperatur, Feuchtigkeit der Luft etc.) abhängt, und sich deshalb immer nur annähernd berechnen lässt. Der Reibungscoefficient wird geringer durch grössere Politur, durch geeignete Gleitmittel, so wie auch wenn der Druck sehr gross wird. Die hier aufgeführten Reibungscoefficienten gelten übrigens nur für einen in Bewegung befindlichen Körper, denn wenn die Körper sehr lange in Berührung gewesen, so haben die Erhöhungen des einen mehr Zeit gehabt, in die Vertiefungen des andern einzudringen, und die Reibung aus

der Ruhe ist deshalb grösser. Eine Erschütterung, ein Stoss bringt jedoch die Reibung der Ruhe fast wieder auf die der Bewegung.

113.



Aufgabe. Auf einer schiefen Ebene liegt ein Körper, dessen Gewicht $P = 160$ ℔. Der Reibungscoefficient sei $f = \frac{1}{3}$, die Länge der schiefen Ebene $l = 20'$, die Höhe $h = 10'$, mithin die Basis $b = 17', 3$. Wie gross muss die parallel mit dem Rücken wirkende Kraft K sein, um das Gleichgewicht auf den Punct der Unterbrechung zu bringen? Es wird angenommen, dass die Richtung der Kraft K durch den Schwerpunct des Körpers geht, damit kein Drehen, Umkippen desselben Statt findet.

Auflösung. Hat die Kraft K die Reibung F überwunden, so bekommt sie es auch noch mit dem respectiven Gewicht R zu thun, sie muss also gleich der Summe beider sein, $K = R + F$. Nun ist nach § 89 das respective Gewicht $R = \frac{h}{l} P$ und der Druck auf die schiefe Ebene $D = \frac{b}{l} P$, folglich die Reibung $F = f . \frac{b}{l} P$ (§ 109), daher:

$$K = \frac{h}{l} . P + f . \frac{b}{l} P$$

$$K = \frac{h + fb}{l} . P \text{*)}$$

$$K = 139{,}3 \text{ ℔.}$$

Anmerkung 1. Käme es nur darauf an, den Körper auf der schiefen Ebene durch eine mit dem Rücken parallele Kraft K′ im Gleichgewicht zu erhalten, damit er nicht, durch sein respectives Gewicht getrieben, hinunter gleitet, so käme die Reibung der erforderlichen Kraft zu Hülfe und es wäre dann

$$K' = \frac{h - fb}{l} . P \text{**)}$$

$$K' = 20{,}7 \text{ ℔.}$$

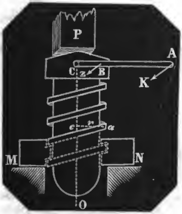
*) Oder auch: $K = (\sin \alpha + f \cos \alpha) . P$

**) Es ist auch: $K' = (\sin \alpha - f \cos \alpha) . P$

Wäre die Reibung grösser als das respective Gewicht, so würde der Körper schon allein durch die Reibung auf der schiefen Ebene festgehalten werden.

Anmerkung 2. So schädlich im Allgemeinen die Reibung bei der Bewegung der Maschinen ist, indem sie dieselben nach und nach zerstört etc., so nützlich ist sie in vielen andern Fällen. Ohne Reibung würde man nichts zwischen den Fingern halten, auf keiner nur etwas abschüssigen Fläche gehen oder stehen können etc.

114.



Aufgabe. Wie gross muss bei einer Schraube die Kraft K sein, welche mit einem Druck von $P = 6000$ ℔. und der dadurch entstehenden Reibung im Gleichgewicht ist? Es sei wieder, wie in § 94, die Höhe eines Schraubengangs $h = 1''$, der Radius der Spindel $CB = r = 4''$, also die Basis der umwundenen schiefen Ebene $b = 2r\pi$, der Hebelarm $AC = R = 2'6''$, der Reibungscoefficient $f = \frac{3}{10}$.

Auflösung. Die Kraft z, welche am Umfange der Spindel, d. h. am Hebelarm r wirkend erforderlich wäre, zerlegt sich nach § 91, indem wir die Länge eines Schraubenganges einstweilen mit l bezeichnen, in $x = \frac{2r\pi}{l} \cdot z$ und $y = \frac{h}{l} z$ (weil $y : z = h : l$). Letztere Kraft $y = \frac{h}{l} z$ verstärkt den Druck auf die Schraubengänge, welchen die Last $P = 6000$ ℔. schon von selber darauf ausübt. Der totale Druck ist also (§ 113): $\frac{2r\pi}{l} \cdot P + \frac{h}{l} z$ und folglich die Reibung $F = f\left(\frac{2r\pi}{l} P + \frac{h}{l} z\right)$. Mit dieser Reibung und dem respectiven Gewichte $R = \frac{h}{l} P$ muss die Kraft $x = \frac{2r\pi}{l} z$ im Gleichgewicht sein, daher:

$$\frac{2r\pi}{l}z = \frac{h}{l}P + f\left(\frac{2r\pi}{l}P + \frac{h}{l}z\right)$$

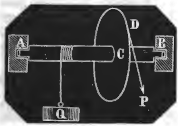
$$z = \frac{h + f.2r\pi}{2r\pi - fh}.P$$

So viel mal nun der Hebelarm $AC = R$ grösser ist, als r, so viel mal ist die fragliche Kraft K kleiner als z, daher:

$$K = \frac{r}{R}.\frac{h + f.2r\pi}{2r\pi - fh}.P$$

$$K = 275 \text{ ℔.}$$

115.



Aufgabe. Wie gross muss, beim Rad an der Welle, die mit der Last $Q = 600$ ℔. und der Zapfenreibung im Gleichgewicht stehende, mit Q parallele, Kraft P sein, wenn das Gewicht der Maschine $G = 200$ ℔., der Radius des Rades $R = 3'$, der der Welle $r = 6''$ und der des Zapfens $r' = 1''$ und der Reibungscoefficient $f = \frac{3}{10}$ ist?

Auflösung. Ob der ganze Druck $Q + P + G$ auf beide Pfannenlager vertheilt ist, oder das eine Lager ihn allein auszuhalten hat, ist für die Rechnung gleichgültig. Der eine Zapfen, der nun den ganzen Druck allein ausübt, soll sich in der Pfanne drehen (gleiten). Die durch den Druck entstehende Reibung F wirkt der Kraft P entgegen und zwar tangential am Zapfen, also an einem Hebelarm $= r'$*). Obwohl nun der Zapfen bei der Umdrehung etwas aufsteigt (auf eine schiefe Ebene kömmt), und dadurch diese Zapfenreibung ein wenig kleiner als die gewöhnliche gleitende Reibung wird, so ist doch dieser Unterschied so äusserst gering, dass man ihn in der Praxis gar nicht berücksichtigt, und deshalb auch hier die § 112 aufgeführten Reibungscoefficienten benutzt. Es ist also die Reibung $F = f(Q + P + G)$. Daher § 72:

---

*) Ob die Kraft F an der Berührungsstelle des Zapfens mit der Pfanne oder 90° davon entfernt, parallel mit Q, wirkt, ist offenbar einerlei.

$$PR = Qr + f(Q + P + G) \,.\, r'$$
$$P = \frac{Qr + f(Q + G) \,.\, r'}{R - fr'}$$

Für das angenommene Zahlenbeispiel wäre $P = 107{,}5$ ℔.

Anmerkung. Wirkte die Kraft P an der andern Seite des Rades, der Last Q entgegengesetzt (aufwärts), so wäre der Druck $= Q - P + G$ und man findet dann $P = \frac{Qr + f(Q + G) \,.\, r'}{R + fr'}$. Aus beiden Formeln und auch schon aus dem Begriffe des Moments folgt, dass die erforderliche Kraft desto kleiner ist, je kleiner der Radius r' des Zapfens ist, der jedoch die erforderliche Festigkeit haben muss.

116.



*) Um die Reibung eines verticalen Zapfens zu finden, der sich mit seiner ebenen Kreisfläche, deren Radius $= r'$, auf einer ebenen Unterlage dreht, überlege man Folgendes: Jeder Punct der Kreisfläche erleidet zwar denselben Druck und dieselbe Reibung, aber die Momente der einzelnen reibenden Puncte sind verschieden, weil sie nicht gleich weit von der Achse (Drehpunct C) entfernt sind. Denkt man sich aber den ganzen Kreis in so kleine Ausschnitte getheilt, dass man sie als Dreiecke betrachten kann, so kann man auch annehmen, dass annähernd alle reibenden Puncte eines so kleinen Dreiecks sich nach parallelen Richtungen (senkrecht auf einem Radius) bewegen. Die Resultante aller dieser gleichen parallelen Reibungskräfte ist gleich ihrer Summe, und der Angriffspunct ist im Schwerpunct des kleinen Ausschnitts (Dreiecks), der um $\frac{2}{3}r'$ vom Mittelpunct C entfernt ist (§ 46). Da nun dies von allen sehr kleinen Ausschnitten gilt, so kann man annehmen, dass der auf alle Puncte gleichmässig vertheilte Druck Q ganz auf die mit $\frac{2}{3}r'$ beschriebene Kreislinie, oder auch auf einen Punct derselben fällt. Die Reibung fQ wirkt demnach an einem Hebelarm $= \frac{2}{3}r'$ und ihr Moment ist mithin $= fQ \,.\, \frac{2}{3}r'$.

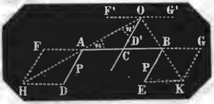
Siebentes Buch.

Ergänzungen und Aufgaben zum ersten Buche.

117.

Da die beiden Sätze über das Parallelogramm der Kräfte und über die Resultante zweier parallelen Kräfte (§§ 22, 29) für die Mechanik das sind, was das einfache Dreieck für die Geometrie und die vier Species für die Arithmetik, also von grosser Wichtigkeit sind, so wollen wir dieselben, damit auch nicht die geringste Dunkelheit bleibt, hier (nach Poinsot, unabhängig von den Begriffen der Bewegung und Geschwindigkeit) noch einmal beweisen, und zwar in umgekehrter Ordnung und statt also den Satz vom Kräftenparallelogramm an die Spitze zu stellen und daraus den über die Resultante zweier parallelen Kräfte abzuleiten, grade umgekehrt, letztern an die Spitze stellen und daraus erstern ableiten.

118.



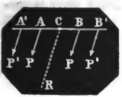
Hülfssatz. Wenn zwei gleiche Kräfte P, P parallel und desselben Sinnes an den Enden einer graden Linie AB wirken, so ist ihre Resultante gleich ihrer Summe, parallel mit ihnen und der Angriffspunct der Resultante halbirt die Linie.

Beweis. Man füge noch die beiden gleichen und grade entgegengesetzten Kräfte $AF = BG = P$ hinzu, so ist dadurch nichts geändert (§ 14).

Statt der beiden in A wirkenden gleichen Kräfte $AF = AD = P$ kann man ihre unbekannte Resultante X setzen, deren Richtung den Winkel FAD halbirt (§ 20). Die Resultante Y der beiden in B wirkenden gleichen Kräfte halbirt ebenfalls den Winkel EBG.

Versetzen wir jetzt die Angriffspuncte beider Resultanten X, Y nach dem Durchschnittspunct O ihrer Richtungen, und zerlegen hier wieder die Resultante X in ihre Composanten $OF' = -P$, $OD' = P$, und ebenso die Resultante Y in ihre Composanten $OG' = +P$ und $OD' = P$, so vernichten sich in O die beiden gleichen entgegengesetzten Kräfte $+P$, $-P$ und können also weggelassen werden, die beiden andern gleichen Kräfte $OD' = P$ und $OD' = P$ fallen zusammen. Es ist demnach, wie behauptet, die fragliche Resultante $R = 2P =$ der Summe der beiden parallelen Kräfte und parallel mit ihnen. Den Angriffspunct O der Resultante R können wir nach dem Punct C in ihrer Richtung versetzen, und dann leicht beweisen, dass auch, wie behauptet, $AC = CB$. Denn das Dreieck ACO ist gleichschenklig, weil $\widehat{n} = \widehat{n}'$, folglich $AC = OC$. Aus demselben Grunde ist $CB = OC$, mithin: $AC = CB$.

119.

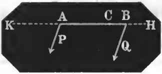


Hülfssatz. Wenn an einer graden Linie AB mehre, paarweis gleiche parallele Kräfte P, P; P', P' · · nach derselben Seite hin und in g l e i c h e n Abständen von der Mitte C der Linie AB wirken ($AC = CB$, $A'C = CB'$...), so ist die Resultante gleich der Summe aller, parallel mit ihnen und der Angriffspunct fällt in die Mitte C.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus vorhergehendem Satz, indem man nach und nach die Resultante von je zwei gleich weit von der Mitte entfernten gleichen Kräften sucht.

Zusatz. Umgekehrt kann man also auch jede an einer graden Linie wirkende Kraft R wieder in paarweis gleiche, parallele und gleich weit von der Mitte entfernte Kräfte zerlegen.

120.



Lehrsatz. Wenn zwei parallele Kräfte P, Q an den Enden einer graden Linie AB nach derselben Seite hin wirken, so ist ihre Resultante gleich der Summe beider, mit ihnen parallel und ihr Angriffspunct C theilt die Linie AB so: dass sich die beiden Theile verhalten, wie umgekehrt die daran wirkenden Kräfte.

Beweis. Es sei p das gemeinschaftliche Maass der beiden Kräfte P und Q und es sei $P = mp$ und $Q = np$, so dass sich also die Kräfte wie $m : n$ verhalten, d. h. $P : Q = m : n$.

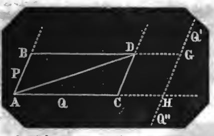
Man denke sich nun die Linie AB in $m + n$ gleiche Theile getheilt, und dieselbe über B hinaus um $BH = n$ und über A hinaus um $AK = m$ solcher Theile verlängert, so dass die ganze Linie KH in $2m + 2n$ gleiche Theile getheilt ist.

Statt der Kraft $P = mp = 2m \cdot \frac{1}{2}p$ kann man nun (§ 119, Zusatz) parallel mit ihr, links und rechts von A, in jedem der $2m$ Theile, $\frac{1}{2}p$ und ebenso statt der Kraft $Q = np = 2n \cdot \frac{1}{2}p$ parallel mit ihr, rechts und links von B, in jedem der noch bleibenden $2n$ Theile, $\frac{1}{2}p$ wirken lassen. Jetzt ist die ganze Linie KH, in jedem ihrer $2(m+n)$ Theile, gleichmässig mit $\frac{1}{2}p$ belastet. Die Resultante R von allen diesen $2(m+n)$ gleichen parallelen Kräften ist nun aber, zufolge § 119, wie behauptet, parallel mit ihnen und gleich ihrer Summe $2(m+n)\frac{1}{2}p = P + Q$, und der Angriffspunct C ist die Mitte von KH, folglich um $m + n$ Theile von K, mithin um n Theile von A und um m Theile von B entfernt, so dass also: $AC : BC = n : m$. Ebenso verhalten sich umgekehrt auch die Kräfte $Q : P = np : mp = n : m$, mithin ist wirklich:

$$AC : BC = Q : P.$$

121.

Lehrsatz. Die Resultante zweier beliebigen Kräfte $AB = P$ und $AC = Q$, welche unter einem beliebigen Winkel auf einen Punct A wirken, ist, der Richtung und Grösse nach, durch die Diagonale AD des über diesen Kräften construirten Parallelogramms ABDC dargestellt.



Beweis. Um zuerst zu zeigen, dass die Diagonale die R i c h t u n g *) der Resultante darstellt, verlängere man BD um DG = AB = CD, so dass noch die Raute DGHC entsteht. In G und H lasse man die grade entgegengesetzten Kräfte Q′ und Q″, wovon jede = Q ist, wirken, so ist dadurch nichts geändert.

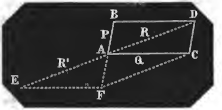
Denkt man nun den Angriffspunct A der Kraft P nach B versetzt, so kann man statt der parallelen Kräfte P und Q′ ihre Resultante P + Q′ setzen, deren Angriffspunct in D ist (weil BD : DG = Q′ : P).

Den Angriffspunct der Kraft Q kann man sich von A nach H versetzt denken. Dann wirken in H zwei gleiche Kräfte Q und Q″, die Richtung ihrer Resultante halbirt den Winkel bei H und geht (der Raute halber) durch den Punct D. Die beiden in H wirkenden Composanten Q und Q″ kann man also, parallel mit sich selbst, nach D versetzt denken (§ 20 Zus.), wo sich dann Q′ und Q″ tilgen. Die in A angreifenden Kräfte P und Q sind durch diese Operationen, parallel mit sich selbst, ohne ihre Wirkung zu ändern, nach D versetzt. Da nun die Resultante von P und Q durch die beiden Puncte A und D geht, so stellt offenbar die Diagonale AD, des über den Kräften P und Q construirten Parallelogramms, die R i c h t u n g der Resultante dar.

Um nun ferner zu zeigen, dass diese Diagonale zugleich auch die Grösse der Resultante darstellt, bemerke man zuerst, dass, wenn die R i c h t u n g und auch die G r ö s s e einer Composante AC = Q, von einer andern Composante aber bloss die Richtung AB, so wie auch bloss die Richtung AD der aus beiden entspringenden Resultante gegeben ist, durch diese drei Data die Grösse der bloss ihrer Richtung nach gegebenen Composante bestimmt und leicht zu finden ist. Zieht man nämlich durch den Endpunct C der völlig bestimmten Composante AC = Q eine Parallele mit der Richtung der der Grösse nach unbekannten Composante, so schneidet diese

*) Der Lehrsatz ist gleichsam ein doppelter, weil er zweierlei zu beweisen verlangt, daher auch die Weitläufigkeit und Künstelei.

Parallele die Richtung der Resultante in einem Punct D; zieht man durch diesen Punct D wieder eine Parallele mit AC = Q, so trifft diese die Richtung der andern Composante in einem Punct P und es stellt nun die Linie AB nothwendig die gesuchte Grösse der bloss der Richtung nach gegebenen Composante dar.



Dies vorausgeschickt, seien AB = P und AC = Q die beiden gegebenen Composanten und folglich, wie eben bewiesen, die Diagonale AD des darüber construirten Parallelogramms die Richtung der Resultante. Kennten wir die (noch unbekannte) Grösse R' dieser Resultante, und liessen sie nach grade entgegengesetzter Richtung AE wirken, so wären die auf den Punct A wirkenden drei Kräfte P, Q, R' offenbar im Gleichgewicht, und eine derselben, z. B. P, gleich und grade entgegengesetzt der Resultante von Q und R', so dass also AF die Richtung der Resultante von Q und R' darstellt. Wir haben hier also wieder den Fall, wo eine Composante AC = Q völlig bestimmt, von einer andern Composante R' und von der aus beiden entspringenden Resultante aber nur die Richtungen bekannt sind. Zieht man demnach aus C eine Parallele mit der Richtung der gesuchten Kraft R', so trifft diese die Verlängerung von BA in einem Punct F, und die durch F mit AC parallele Linie, die Verlängerung von DA in E, und es stellt nun nothwendig die Linie AE die gesuchte Kraft R' dar, und da nun AE = FC = AD, also R = R', so stellt offenbar die Diagonale AD des über den beiden Composanten AB = P, AC = Q construirten Parallelogramms nicht nur die Richtung, sondern zugleich auch die Grösse der Resultante von P und Q dar.

122.

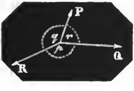
*) Weil im Kräftenparallelogramm die Seite CD = AB = P, so verhalten sich die drei Kräfte P, Q, R wie die Seiten des Dreiecks ACD und da diese sich wie die Sinus der gegenüber liegenden Winkel verhalten, so hat man:

$P : Q : R = \sin CAD : \sin CDA : \sin ACD$,

also auch, weil die Sinus zweier Nebenwinkel gleich sind:

$P : Q : R = \sin CAE : \sin BAE : \sin BAC$.

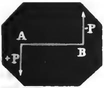
123.



*) Wenn also drei Kräfte P, Q, R um einen Punct im Gleichgewicht sind, und man die ihnen gegenüber liegenden Winkel, Kürze halber, mit p, q, r bezeichnet, so muss immer folgende Gleichung Statt finden:

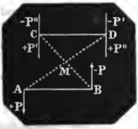
$$P : Q : R = \sin p : \sin q : \sin r.$$

124.



Kräftenpaar. Zwei gleiche parallele, aber entgegengesetzte Kräfte + P, — P, die an zwei verschiedenen Puncten eines Körpers wirken, nennt man ein Kräftenpaar (couple, vergl. § 34). Die auf beiden Richtungen senkrechte Linie AB, an deren Enden man die Kräfte angebracht denken kann, heisst der Hebelarm, und das Product aus einer dieser gleichen Kräfte und dem Hebelarm das Moment des Kräftenpaars. Poinsot hat zuerst die Theorie des Kräftenpaars vollständig entwickelt und fast die ganze Statik fester Körper darauf gegründet (éléments de statique). Wir entnehmen daraus die beiden folgenden wichtigsten Sätze:

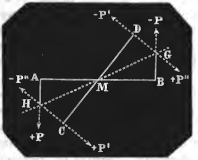
125.



Lehrsatz. Jedes an einem Körper befindliche Kräftenpaar kann, ohne dessen Wirkung zu ändern, nach jeder beliebigen Stelle in derselben, oder auch einer parallelen Ebene versetzt, und darin beliebig gedreht (in jede beliebige Lage gebracht) werden, vorausgesetzt, dass der neue Hebelarm mit ersterem fest verbunden, oder, was dasselbe ist, die neuen Angriffspuncte an demselben Körper sich befinden.

Beweis. Um zuvor die Richtigkeit des ersten Theils dieses Satzes zu zeigen, nehme man irgendwo, in derselben oder auch in einer parallelen Ebene den neuen Hebelarm CD gleich und parallel AB, ziehe AD und BC, welche Linien sich gegenseitig in M halbiren. Jetzt bringe man an CD und parallel mit den Kräften + P, — P zwei Kräftenpaare an (P′, — P′) und (P″, — P″) welche (obwohl der Deutlichkeit halber verschieden bezeichnet) unter sich und dem Kräftenpaar (P, — P) gleich sind, so ist dadurch, weil erstere beiden sich tilgen, an der Wirkung des letztern (P, —P) nichts geändert.

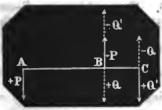
Die beiden gleichen und parallelen Kräfte + P, + P″ haben eine Resultante = 2 P parallel mit ihnen, und deren Angriffspunct M ist. Dasselbe gilt von den beiden Kräften — P, — P″, und ihre Resultante — 2 P tilgt die erstere Resultante + 2 P und es bleibt nur noch das dem ursprünglichen gleiche Kräftenpaar (P′, — P′), welches in dieser Lage noch dieselbe Wirkung auf den Körper ausübt.



Um ferner zu zeigen, dass ein Kräftenpaar (P, — P) an dem Hebelarm AB in seiner Ebene beliebig gedreht werden kann, ziehe man in derselben Ebene unter einem beliebigen Winkel die Linie CD = AB so, dass beide Linien sich in M halbiren. Bringt man nun wieder an CD zwei entgegengesetzte Kräftenpaare (P′, — P′) und (P″, — P″) an, welche unter sich und dem gegebenen (P, — P) gleich und in derselben Ebene sind, so ist dadurch, weil erstere beiden sich tilgen, nichts geändert. Es ist aber nun leicht einzusehen, dass die Kräfte — P und + P″ und ebenso + P und — P″ in G und H angreifende, gleiche und grade entgegengesetzte Resultanten haben, die sich tilgen, und es bleibt also noch das an dem Hebelarm CD wirkende Kräftenpaar (P′, — P′) übrig, welches man als das ursprüngliche, in seiner Ebene gedrehte, betrachten kann.

126.

Lehrsatz. Ein Kräftenpaar (P, — P) am Hebelarm AB kann in ein gleichwirkendes (Q, — Q) am Hebelarm BC ver-



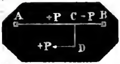
wandelt werden, vorausgesetzt, dass die Momente einander gleich sind P . AB = Q . BC.

Beweis. Auf der Verlängerung von AB nehme man ein beliebiges Stück BC und lasse daran, parallel mit (P, — P) die beiden gleichen und entgegengesetzten Kräftenpaare (Q, — Q) und (Q', — Q') wirken; so ist dadurch nichts geändert. Ist nun Q (= Q') so gross, dass P : Q' = BC : AB oder P . AB = Q . BC, so kann man statt der Kräfte P und Q' ihre Resultante P + Q' substituiren, deren Angriffspunct in B fällt (§ 29) und folglich durch die grade entgegengesetzt wirkenden Kräfte — P und — Q getilgt wird. Man hat also statt des Kräftenpaars (P, — P) am Hebelarm AB das ihm gleichgeltende (Q, — Q) am Hebelarm BC.

127.

Aus den beiden vorhergehenden Fundamentalsätzen geht schon von selbst hervor, dass man die Kräftenpaare ebenso wie einfache Kräfte muss componiren und decomponiren können, und dies ist es, was Poinsot vollständig ausgeführt hat. Lägen z. B. zwei Kräftenpaare in zwei nicht parallelen Ebenen, so kann man sie erst nach der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie beider Ebenen versetzen (§ 125), sie hier auf einerlei Hebelarm reduciren (§ 126) und dann durch Bestimmung der Resultante aus beiden Kräftenpaaren ein einziges bilden. Wirken mehre Kräftenpaare an einem Körper, so könnte man nach und nach das resultirende Kräftenpaar von je zwei und zwei suchen etc.

128.



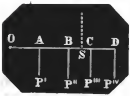
Aufgabe. An dem mit einer Achse AB = a fest verbundenen rechtwinkligen Arm CD = b wirkt in D eine Kraft P parallel mit der Achse AB; man sucht den Druck in den Pfannenlagern.

Auflösung. Denkt man sich in C in der Richtung der Achse zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte + P, — P angebracht, so ist dadurch nichts geändert. Die erstere Kraft + P drückt die Achse nach der Richtung BA gegen die Pfanne. Die beiden andern Kräfte bilden ein Kräftenpaar

(P, — P) am Hebelarm CD $= b$. Verwandelt man dieses Kräftenpaar in ein anderes, dessen Hebelarm A B $= a$ ist, so ist dasselbe $\left(+\frac{b}{a}P, -\frac{b}{a}P\right)$ (§ 126). Die in den Pfannenlagern A und B senkrecht auf der Achse und entgegengesetzten Drücke sind also $= \frac{b}{a}$ P, und desto geringer, je kleiner b gegen a ist. (Je weiter die Angeln einer Thür von einander entfernt sind, desto besser halten sie.)

Anmerkung. Wäre die in D wirkende Kraft nicht parallel mit der Achse, so kann man sie erst in eine damit parallele und eine darauf senkrechte zerlegen.

129.



Aufgabe. Eine Methode anzugeben, nach welcher man den Mittelpunct paralleler Kräfte P', P'', P''',.... findet, die rechtwinklig an einer graden Linie wirken.

Auflösung. Am einfachsten ist es hier, die Theorie der Momente (wie beim Hebel) anzuwenden. Man messe deshalb erst die Abstände der Angriffspuncte A, B,.. von einem in derselben Linie beliebig angenommenen Puncte O, nämlich: O A $= x'$, O B $= x''$, O C $= x'''$,... und betrachte diese (Abscissen) als die Hebelarme der Kräfte P', P'',....

Die Resultante R aller parallelen Kräfte ist gleich ihrer Summe (§ 36):

$$R = P' + P'' + P''' + P^{IV} + \dots\dots\dots\dots (1)$$

Setzt man den zu findenden Abstand ihres Angriffspuncts S von O, nämlich O S $= x$, und denkt sich die Resultante in diesem Punct S (Schwerpunct) in entgegengesetzter Richtung wirkend, so würde Gleichgewicht hergestellt sein, und dieses fortbestehen, wenn die Linie OD als Hebel und der Punct O (wo er auch in der Linie angenommen sein mag) als Stützpunct gedacht wird. Dann wäre das Moment der Resultante R gleich der Summe aller Momente, nämlich:

$$R x = P' x' + P'' x'' + P''' x''' + \dots\dots\dots \text{woraus:}$$

$$x = \frac{P' x' + P'' x'' + P''' x''' + \dots\dots}{P' + P'' + P''' + \dots\dots} \dots (2)$$

Wäre z. B.:	so ist:
$P' = 50, \quad x' = 2$	$x = \frac{100 + 320 + 360 + 490}{260}$
$P'' = 80, \quad x'' = 4$	
$P''' = 60, \quad x''' = 6$	$x = 4\frac{23}{26}$.
$P^{IV} = 70, \quad x^{IV} = 7.$	

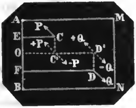
130.

Hätte man den ganz beliebig gewählten Anfangspunct O, von welchem aus die Abstände der Angriffspuncte A, B, C... gemessen werden, innerhalb der parallelen Kräfte angenommen (was übrigens für den practischen Zweck, den wir hier im Auge haben, immer vermieden werden kann), so gelten dennoch die beiden Gleichungen § 129 auch für diesen Fall, nur müssen dann, wenn man die von O nach der rechten Seite gemessenen Abstände (Abscissen, Hebelarme) als positiv betrachtet, die in entgegengesetzter Richtung gemessenen als negativ (mit dem minus-Zeichen) genommen werden. Gäbe für diesen Fall die Gleichung (2) für x einen negativen Werth, so würde der gesuchte Punct S links von O, und gäbe sie $x = 0$, genau mit O zusammenfallen.

Die Formeln sind auch dann noch gültig und mithin ganz allgemein, wenn auch die parallelen Kräfte zum Theil in entgegengesetzter Richtung wirken, nur muss man dann ihre Vorzeichen berücksichtigen. Eine positive Kraft an einem negativen Hebelarm giebt ein negatives Drehmoment, und eine negative Kraft an einem negativen Hebelarm giebt ein positives Drehmoment. Dies alles folgt einfach aus der Vorstellung des Hebels.

Wäre $R = 0$ und $x = \infty$, so würde dies das Vorhandensein eines Kräftenpaars andeuten.

131.

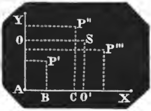


Aufgabe. Eine Ebene AN kann sich um eine festliegende Achse AB drehen (wie eine Thür in ihren Angeln). In den Puncten C und D wirken senkrecht auf ihr und nach entgegengesetzten Richtungen zwei Kräfte P und Q. Wie müssen sich diese Kräfte für den Zustand des Gleichgewichts ver-

halten, wenn die Abstände ihrer Angriffspuncte von der Drehachse $CE = p$ und $DF = q$ sind?

Auflösung. Um zu zeigen, dass die Vorstellung eines einarmigen Hebels, welche sich hier von selbst aufdringt, ganz richtig ist, denke man sich in einem beliebigen Punct O der Achse ein Perpendikel errichtet, welches von den durch C und D parallel mit der Achse gehenden Linien in C′ und D′ geschnitten wird. In C′ lasse man senkrecht auf die Ebene zwei entgegengesetzte Kräfte P, — P und ebenso in D′ die entgegengesetzten Kräfte Q, — Q wirken, so ist dadurch nichts geändert. Jetzt hat man zwei Kräftenpaare (P, — P) am Hebelarm CC′ und (Q, — Q) am Hebelarm DD′. Die Hebelarme beider Kräftenpaare kann man (wie § 125 gezeigt) als auf der festen Achse AB liegend annehmen. Beide Kräftenpaare sind bestrebt, die Achse in einer durch sie gehenden und auf AN senkrechten Ebene zu drehen und einen Druck auf die Stützpuncte A, B auszuüben, und werden also durch diese Stützpuncte, weil sie fest sind, vernichtet. Es bleiben nun noch die beiden in C′ und D′ entgegengesetzt wirkenden Kräfte P und Q übrig, und diese sind also (weil man O als Stützpunct eines einarmigen Hebels betrachten kann) im Gleichgewicht, wenn sie sich umgekehrt wie ihre Hebelarme $OC' = p$, $OD' = q$ verhalten, oder wenn ihre Momente gleich sind $Pp = Qq$.

132.



Aufgabe. Den Mittelpunct eines Systems paralleler und gleichen Sinnes wirkender Kräfte P′, P″, P‴, ... zu finden, deren Angriffspuncte (die wir durch dieselben Buchstaben P′, P″, ... bezeichnen wollen) in einerlei Ebene liegen, und deren Lage durch rechtwinklige Coordinaten $AB = x'$, $BP' = y'$, $AC = x''$, $CP'' = y''$ etc. gegeben ist.

Auflösung. Wir können annehmen, dass die parallelen Kräfte senkrecht auf die Coordinatenebene wirken, z. B. vertical nach unten (§ 36, Zusatz). Wäre nun S der fragliche Mittelpunct der parallelen Kräfte und dächte man sich die Resultante $R = P' + P'' + P''' + \ldots$ in diesem Punct S nach entgegengesetzter Richtung, also vertical nach oben wirkend,

so wäre Gleichgewicht hergestellt, und dieses offenbar bestehend, wenn man sich einmal die Achse AY und dann auch die Achse AX als fest und die Coordinatenebene, wie im vorhergehenden Paragraph, darum drehbar denkt.

Setzt man also, um die Lage des fraglichen Punctes S zu bestimmen, die Abscisse desselben $AO' = OS = x$ und die Ordinate $O'S = y$, so hat man, weil das Drehmoment der Resultante gleich der Summe aller Drehmomente, sowohl für die Achse AY, als auch für die Achse AX ist, indem man nach § 131 die von den Angriffspuncten darauf gefällten Perpendikel als Hebelarme betrachten kann, die folgenden Gleichungen:

$$R = P' + P'' + P''' + P^{IV} + \ldots \ldots \ldots (1)$$
$$Rx = P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots \ldots \ldots (2)$$
$$Ry = P'y' + P''y'' + P'''y''' + \ldots \ldots \ldots (3)$$

woraus dann die fraglichen Mittelpuncts-Coordinaten leicht zu finden sind, nämlich:

$$x = \frac{P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots}{P' + P'' + P''' + \ldots}$$
$$y = \frac{P'y' + P''y'' + P'''y''' + \ldots}{P' + P'' + P''' + \ldots}$$

Anmerkung. Obgleich wir vorstehende Formeln nur in den Fällen anwenden werden, wo die parallelen Kräfte einerlei Sinnes wirken, so wollen wir doch bemerken, dass die Formeln mit Berücksichtigung der Vorzeichen der Coordinaten und der parallelen Kräfte ganz allgemein gültig sind (vergl. § 130).

133.

Aufgabe. Auf einer in drei Puncten unterstützten horizontalen Ebene (z. B. ein dreibeiniger Tisch), wird in einem Puncte O ein verticaler Druck von $R = 1000$ ℔. ausgeübt. Wie vertheilt sich dieser Druck auf die drei Stützpuncte, deren Coordinaten beziehlich

$$x' = 4'; \quad x'' = 14'; \quad x''' = 16';$$
$$y' = 8'; \quad y'' = 2'; \quad y''' = 10'.$$

Die Coordinaten des Punctes O seien $x = 12'$ und $y = 6'$.

Auflösung. Hier muss umgekehrt die Kraft $R = 1000$ in drei parallele Composanten P', P'', P''' zerlegt werden. Da nun zwischen den gegebenen und gesuchten Grössen die drei Bedingungsgleichungen § 132 Statt finden müssen, so hat man:

$$P' + P'' + P''' = 1000$$
$$4P' + 14P'' + 16P''' = 12000$$
$$8P' + 2P'' + 10P''' = 6000$$

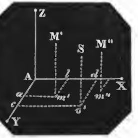
Hieraus findet man leicht (Algebra § 164):

$$P' = 260\tfrac{20}{23},\quad P'' = 434\tfrac{18}{23},\quad P''' = 304\tfrac{8}{23}.$$

Anmerkung. Hätte man den Druck auf vier oder mehre Stützpuncte einer unbiegsamen Ebene zu vertheilen, so wäre die Aufgabe eine sogenannte unbestimmte gewesen, weil nur drei Gleichungen sich bilden lassen. Dasselbe gilt, wenn der senkrechte Druck auf einer unbiegsamen Linie (Balken) auf drei oder mehre Stützpuncte vertheilt werden sollte, weil dann nur zwei Bedingungsgleichungen vorhanden sind (§ 129).

134.

*) **Aufgabe.** Den Mittelpunct S eines Systems paralleler und gleichen Sinnes wirkender Kräfte P', P'', P''',.... zu finden, welche einen Körper in beliebigen Puncten M', M'', M''',....angreifen.



Auflösung. Da hier die Angriffspuncte im Raume zerstreut liegen, so müssen wir, um ihre Lage zu bestimmen, drei auf einander senkrechte Coordinaten-Achsen AX, AY, AZ haben und für jeden der Angriffspuncte M', M'',.. die respectiven Coordinaten x', y', z'; x'', y'', z'';.... messen. Die gesuchten Coordinaten des fraglichen Mittelpuncts seien x, y, z. (Höhere Geometrie § 102 etc.)

Sind die parallelen Kräfte P', P'',... nicht senkrecht auf die Ebene YAX gerichtet, so kann man sie durch Drehung in diese Lage gebracht denken. Die Grösse der Resultante R = P' + P'' + P''' + ... und die Lage ihres Angriffspunctes S wird dadurch nicht geändert (§ 36). Denkt man sich ferner die Angriffspuncte M', M'',... S, nach den Puncten m', m'',...s' versetzt, in welchen die Richtungen der auf der Ebene YAX senkrechten Kräfte diese Ebene treffen, und lässt die Resultante R im Puncte s' in entgegengesetzter Richtung wirken, so wäre Gleichgewicht hergestellt, und dieses würde offenbar bestehen, wenn man sich vorstellt, die Kräfte seien bestrebt, die Ebene YAX sowohl um die festgedachte Achse AY, als auch um die festgedachte Achse AX zu drehen. Diese Vor-

stellung führt aber, zur Bestimmung der beiden Coordinaten x und y, auf die Gleichungen § 132. Denn die von den Puncten m', m'', ... s' (Projectionen von M′, M″...S) auf die beiden Achsen AY, AX gefällten Perpendikel (Hebelarme) sind den gegebenen Coordinaten gleich $m'a = x'$, $m'l = y'$, etc. ferner $s'c = x$, $s'd = y$.

Um noch eine Gleichung für die fragliche dritte Coordinate z zu finden, stelle man sich vor, die parallelen Kräfte seien jetzt senkrecht auf eine der beiden andern Coordinaten-Ebenen, z. B. auf ZAX gerichtet und ihre Angriffspuncte M′, M″, ... S nach den Durchschnittspuncten m_1, m_2 ... s_2 in dieser Ebene versetzt (die Puncte sind in der Zeichnung nicht angedeutet). Denkt man sich jetzt wieder die in s_2 wirkende Resultante R in umgekehrter Richtung wirkend, so wäre Gleichgewicht hergestellt, und dies würde bestehen, wenn wir uns vorstellen, die Kräfte wären bestrebt, die Ebene ZAX um die als fest gedachte Achse AX zu drehen. Die von den Angriffspuncten m_1, m_2 ... s_2 auf die Achse AX gefällten Perpendikel (Hebelarme) sind aber gleich den Coordinaten z', z'', ... z. Daher zur Bestimmung der Resultante R und der fraglichen Coordinaten x, y, z ihres Angriffspuncts die vier Gleichungen:

$$R = P' + P'' + P''' + P^{IV} + \ldots \quad (1)$$

$$Rx = P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots \quad (2)$$

$$Ry = P'y' + P''y'' + P'''y''' + \ldots \quad (3)$$

$$Rz = P'z' + P''z'' + P'''z''' + \ldots \quad (4)$$

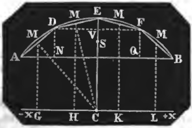
Zusatz 1. Diese Gleichungen sind offenbar ganz allgemein gültig, wenn auch die parallelen Kräfte theils entgegengesetzt wirken und der Anfangspunct A der Coordinaten, statt ausserhalb, wie hier angenommen worden, innerhalb der Angriffspuncte angenommen wird, nur hat man dann die Vorzeichen der Kräfte und Coordinaten zu berücksichtigen.

Zusatz 2. Die vorstehenden vier Gleichungen können angewandt werden, wenn es sich darum handelt, die Lage des Schwerpuncts einer Maschine (eines Instruments etc.) zu bestimmen, vorausgesetzt, dass man die Schwerpuncte von jedem einzelnen der mit einander verbundenen Theile derselben zu bestimmen weiss, wozu das folgende Buch die nöthige Anleitung geben soll.

Achtes Buch.

Bestimmung des Schwerpuncts von einigen der wichtigsten Figuren.

135.



Aufgabe. Den Schwerpunct eines Kreisbogens AB zu finden.

Auflösung. Man denke sich in den Bogen ein Stück eines regelmässigen Vielecks beschrieben, und suche erst den Schwerpunct von diesem Stück. Der vom Mittelpunct C nach der Mitte E des Bogens gehende Radius CE theilt das Vieleck in zwei gleiche Hälften und geht also durch den Schwerpunct S desselben. Betrachten wir demnach CE als die eine, und die darauf senkrechte mit der Sehne AB Parallele $\overline{xx}$ als die andere Momentenachse, so brauchen wir offenbar nur die Ordinate $CS = y$ des Schwerpuncts zu suchen, weil die Abscisse desselben $x = 0$ ist.

Setzt man nun das Gewicht der Längeneinheit der Vielecksseiten $= p$ und denkt sich von dem Schwerpunct (Mitte) einer jeden Vielecksseite, in welchem man sich die Gewichte

AD.p, DE.p etc. angebracht denken kann, die Perpendikel MG, MH,.. auf die Drehachse $\overline{xx}$ gefällt, so hat man nach § 132:

$$(AD.p+DE.p+EF.p+FB.p)y = AD.p.MG+DE.p.MH+\ldots$$

oder, indem wir den allen Gliedern gemeinschaftlichen Factor p weglassen, kürzer*):

$$(AD+DE+EF+FB)y = AD.MG+DE.MH+EF.MK+FB.ML.$$

Denkt man sich ferner die Perpendikel DN, EV, FQ gefällt, und die Mitten M aller Vielecksseiten mit C verbunden, welche Linien unter sich gleich sind und senkrecht auf den Vielecksseiten stehen, so folgt, weil $\triangle ADN \backsim \triangle CMG$, dass:

$$AD:CM = AN:MG, \text{ woraus: } AD.MG = CM.AN;$$

ferner, weil $\triangle DEV \backsim \triangle CMH$, dass

$$DE:CM = DV:MH, \text{ woraus: } DE.MH = CM.DV.$$

Ebenso folgt, dass: EF.MK=CM.VF und FB.ML=CM.QB. Dies in obige Gleichung substituirt, ist auch:

$$(AD+DE+EF+FB)y = CM.AN+CM.DV+CM\,VF+CM.QB$$
$$(AD+DE+EF+FB)y = CM(AN+DV+VF+QB)$$
$$y = \frac{CM.AB}{AD+DE+EF+FB}$$

Um aus dieser Formel für den Schwerpunct des regelmässigen Vielecks die für den Kreisbogen AB abzuleiten, denke man sich die Vielecksseiten immerfort verdoppelt, so bleibt in der Formel der Factor AB immer derselbe, der Factor CM aber wird mit jeder Verdoppelung immer grösser und an der Grenze, wo kein Verdoppeln mehr Statt findet, gleich dem Radius, und der Nenner gleich der Länge des Bogens.

Setzen wir die Länge des Bogens $\widehat{AB} = s$, die Sehne AB $= c$, den Radius CE $= r$, so hat man zur Bestimmung des Schwerpuncts S dieses Bogens die einfache Formel:

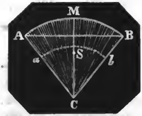
$$CS = \frac{rc}{s}$$

Wäre z. B. $c = r = 5'$, also $s = \frac{2r\pi}{6}$, so ist CS $= 4\frac{1}{3}\frac{1}{3}'$.

---

*) Dass der Factor p in allen Gliedern vorkommt, rührt daher, weil — wenn alle Puncte gleich schwer sind — die Gewichte immer den Längen (Flächen, Volumen) proportional sind. Wir können also in allen solchen Fällen das Gewicht der Längen- (Flächen-, Körper-) Einheit unberücksichtigt lassen oder dasselbe $= 1$ setzen.

136.



Aufgabe. Den Schwerpunct eines Kreisausschnitts CAB zu finden, wenn $AC = r$, $\widehat{AB} = s$ und $\overline{AB} = c$ gegeben sind.

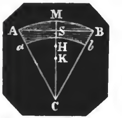
Auflösung. Denkt man den Kreisausschnitt in unendlich kleine Ausschnitte (Elemente) zerlegt, so kann man diese als Dreiecke betrachten. Da nun die Schwerpuncte dieser Dreiecke um $\frac{2}{3}r$ vom Mittelpunct C entfernt sind (§ 46), so hat man nur den Schwerpunct S von dem mit $\frac{2}{3}r$ beschriebenen Bogen ab zu bestimmen und deshalb in vorhergehender Formel (§ 135) $\frac{2}{3}r$, $\frac{2}{3}c$, $\frac{2}{3}s$ statt r, c, s zu setzen, und hat dann (wenn CM den Ausschnitt halbirt):

$$CS = \frac{2}{3} \cdot \frac{rc}{s}$$

Wird der Kreisausschnitt ein Halbkreis, mithin $c = 2r$ und $s = r\pi$, so ist $CS = \frac{4r}{3\pi}$.

Anmerkung. Die Formeln zur Bestimmung der Schwerpuncte gelten für alle besondern Fälle, sind ganz allgemein.

137.



Aufgabe. Den Schwerpunct S eines concentrischen Kreisringes, wie $ABba$ zu bestimmen, wenn die Radien $AC = R$, $aC = r$, die Sehne $\overline{AB} = c$ und der Bogen $\widehat{AB} = s$ gegeben sind.

Auflösung. Der Schwerpunct liegt jedenfalls in der Linie CM, welche die Fläche in zwei gleiche Hälften theilt.

Sei nun f der Inhalt des Ausschnitts CAB und H sein Schwerpunct, mithin $f.CH$ das Moment dieses Ausschnitts, in Beziehung auf den in C unterstützt gedachten Hebel. (§ 135, Rdmkg.) Sei ferner K der Schwerpunct des Ausschnitts Cab, so ist (Geometrie § 125) $\frac{r^2}{R^2} f.CK$ dessen Moment. Da nun, wenn S der gesuchte Schwerpunct des Ringstücks,

$\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)f.CS$ dessen Moment ist, und die Summe der beiden letztern Momente gleich dem erstern ist, so hat man:

$$\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)f.CS+\frac{r^2}{R^2}f.CK=f.CH$$

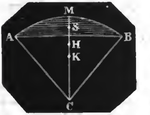
$$\frac{R^2-r^2}{R^2}.CS=CH-\frac{r^2}{R^2}.CK$$

Hierin ist nun aber (§ 136) $CH=\frac{2}{3}\frac{Rc}{s}$; ferner (weil $\widehat{ab}=\frac{r}{R}s$, $\overline{ab}=\frac{r}{R}c$) $CK=\frac{2}{3}\frac{rc}{s}$. Dies substituirt und gehörig reducirt, hat man:

$$CS=\frac{2c}{3s}\cdot\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}$$

Beispiel. Sei $c=R=6'$ und $r=5'$, so ist $s=\frac{R\pi}{3}$ und $CS=5\frac{32}{121}'$.

138.



Aufgabe. Den Schwerpunct S eines Kreisabschnitts AMB zu finden, dessen Bogen $AB=s$, Sehne $AB=c$, Radius $AC=r$ gegeben ist.

Auflösung. Sei F die Fläche des Ausschnitts CAB, dessen Schwerpunct H, dessen Moment also $=F.CH$. Sei ferner f die Fläche des Dreiecks CAB, K dessen Schwerpunct und folglich $f.CK$ dessen Moment. Ist nun S der Schwerpunct des Abschnitts, so ist dessen Moment $=(F-f).CS$. Da nun die Summe der Momente des Dreiecks und des Abschnitts gleich dem Moment des Ausschnitts ist, so hat man:

$$(F-f).CS+f.CK=F.CH$$

$$CS=\frac{F.CH-f.CK}{F-f}$$

Hierin ist: $F=\frac{1}{2}rs$; $\quad f=\frac{1}{2}c\sqrt{r^2-\frac{1}{4}c^2}$;

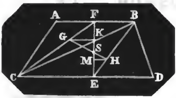
$$CH=\frac{2}{3}\frac{rc}{s};\quad CK=\frac{2}{3}\sqrt{r^2-\frac{1}{4}c^2}.$$

Dies substituirt, kommt, wenn man die Fläche des Abschnitts $F-f=A$ setzt:

$$CS=\frac{c^3}{12A}=\frac{c^3}{6\left(rs-c\sqrt{r^2-\frac{1}{4}c^2}\right)}$$

Verwandelt sich der Abschnitt in einen Halbkreis, so ist $c=2r$ und $CS=\frac{4r}{3\pi}$, wie vorhin (§ 136 Anmerkg.).

139.



Aufgabe. Den Schwerpunct S eines Trapezes zu bestimmen, wenn die beiden parallelen Seiten $AB = a$, $CD = b$ und die Linie, welche ihre Mitten verbindet $EF = c$ gegeben sind.

Auflösung. Der Schwerpunct liegt erstlich in der Linie EF, weil sie alle mit AB parallelen Linien halbirt, zweitens in der Linie GH, welche die Schwerpuncte G und H der beiden Dreiecke CAB und BCD mit einander verbindet; mithin im Durchschnittspunct S beider Linien.

Zieht man HM und GK parallel mit AB, so ist $EM = MK = \frac{1}{3}c$, $HM = \frac{1}{6}a$, $GK = \frac{1}{6}b$, daher, wenn man $ES = x$ setzt und beachtet, dass $\triangle HMS \sim \triangle GKS$,

$$(x - \tfrac{1}{3}c) : (\tfrac{2}{3}c - x) = \tfrac{1}{6}a : \tfrac{1}{6}b, \text{ woraus:}$$

$$x = \frac{c}{3} \cdot \frac{2a+b}{a+b}$$

Anmerkung. Setzt man den Abstand der parallelen Seiten $= h$ und das vom Schwerpunct auf die Seite $CD = b$ gefällte Perpendikel $= y$, so hat man hierfür, indem man in obige Formel bloss h statt c setzt (Geometrie § 114):

$$y = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a+b}{a+b}$$

140.

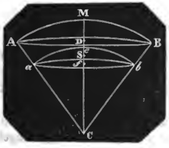


Aufgabe. Den Schwerpunct einer Kugelhaube (Zone) zu bestimmen.

Auflösung. Da auf einer Kugel alle Zonen von gleicher Höhe auch gleichen Flächeninhalt haben (Geometrie § 178, 1), so kann man sich die Haube in parallele Zonen von gleicher, unendlich kleiner Höhe getheilt denken. Da nun der Schwerpunct einer jeden solchen unendlich dünnen Zone in die Linie AP fällt, welche die Höhe der Haube angiebt, und wegen des gleichen Flächeninhalts der unendlich dünnen

parallelen Zonen alle Puncte dieser Linie AP als gleich schwer angenommen werden müssen, so liegt der Schwerpunct S der Kugelhaube offenbar in der Mitte ihrer Höhe: $PS = \frac{1}{2} AP$.

141.



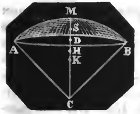
Aufgabe. Den Schwerpunct eines Kugelausschnitts zu finden, wovon der Radius $CM = r$, die Höhe der Grundfläche (Haube) $MD = h$ gegeben ist.

Auflösung. Denkt man sich den Kugelausschnitt in lauter gleiche Pyramiden (Kegel) zerlegt, deren Spitzen in C, und deren Grundflächen unendlich klein sind, so sind alle Schwerpuncte derselben um dreiviertel des Radius vom Mittelpunct C entfernt (§ 50), und liegen also gleichmässig in der mit $Ce = \frac{3}{4} r$ beschriebenen Haube, deren Höhe $ef = \frac{3}{4} h$ ist. Der Schwerpunct S des Kugelausschnitts liegt also in der Mitte von ef, daher, weil $eS = \frac{1}{2} . \frac{3}{4} h$,

$$CS = \tfrac{3}{4} (r - \tfrac{1}{2} h).$$

Zusatz. Verwandelt sich der Ausschnitt in eine Halbkugel, so wird $h = r$ und $CS = \frac{3}{8} r$.

142.



Aufgabe. Den Schwerpunct eines Haubenabschnitts zu bestimmen, wenn der Radius $AC = r$ und die Höhe $AD = h$ gegeben sind.

Auflösung. Da in Bezug auf den Stützpunct C die Summe der Momente vom Abschnitt und vom Kegel CAB dem Moment des Kugelausschnitts gleich ist, so hat man, wenn S, K, H die bezüglichen Schwerpuncte, V das Volumen des Ausschnitts, v das des Kegels, also $V - v$ das des Abschnitts ist,

$$(V - v) . CS + v . CK = V . CH.$$

Hierin ist nun (Geometrie § 184):

$$V = \tfrac{2}{3} r^2 \pi h; \qquad v = \frac{r - h}{3} (2r - h) h \pi$$

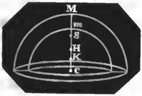
$$CH = \tfrac{3}{4} (r - \tfrac{1}{2} h): \quad CK = \tfrac{3}{4} (r - h).$$

Dies substituirt und gehörig reducirt, kommt:

$$CS = \tfrac{3}{4} . \frac{(2r-h)^2}{3r-h}$$

Verwandelt sich der Abschnitt in eine Halbkugel, so hat man, wie vorhin, $CS = \tfrac{3}{8} r$.

143.



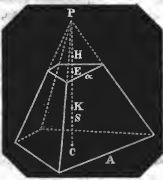
Aufgabe. Den Schwerpunct einer concentrisch ausgehöhlten Halbkugel zu finden, wenn $CM = R$ und $Cm = r$ gegeben.

Auflösung. Da das Moment der als voll gedachten Halbkugel gleich der Summe der Momente der kleinern Halbkugel und der ausgehöhlten ist, so hat man, das Volumen der grössern Halbkugel $= V$, also das der kleinern $= \frac{r^3}{R^3} V$ gesetzt (Geometrie § 180):

$$\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right) V . CS + \frac{r^3}{R^3} V . \tfrac{3}{8} r = V . \tfrac{3}{8} R$$

$$CS = \tfrac{3}{8} . \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}$$

144.



Aufgabe. Den Schwerpunct S einer abgekürzten Pyramide zu finden, wenn zwei ähnlich liegende Seiten der parallelen Grundflächen A, a und die ihre Schwerpuncte C und E verbindende Linie $CE = c$ gegeben sind.

Auflösung. Denkt man sich die Pyramide ergänzt, so muss die Summe der beiden Momente der abgekürzten und der Ergänzungspyramide dem Momente der ganzen Pyramide gleich sein. Ist nun V der Inhalt der ganzen Pyramide, also $\frac{a^3}{A^3} V$ der Inhalt der Ergänzungspyramide und $\left(1 - \frac{a^3}{A^3}\right) V$ der

Inhalt der abgekürzten Pyramide, K, H, S die bezüglichen Schwerpuncte, so ist in Beziehung auf den Drehpunct C:

$$\left(1-\frac{a^3}{A^3}\right)V.CS + \frac{a^3}{A^3}.V.CH = V.CK.$$

Setzt man PE $= x$, so folgt aus: $x:(x+c) = a:A$, dass $x = \frac{ac}{A-a}$ ferner:

$$CK = \tfrac{1}{4}\left(c + \frac{ac}{A-a}\right) = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{Ac}{A-a}$$

$$CH = c + \tfrac{1}{4}\,\frac{ac}{A-a} = \frac{c}{4}\cdot\frac{4A-3a}{A-a}$$

Dies substituirt, kommt:

$$CS = \frac{c}{4}\cdot\frac{A^4-4Aa^3+3a^4}{(A-a)\;(A^3-a^3)}$$

und wenn man Zähler und Nenner durch $A^2-2Aa+a^2$ dividirt (Algebra § 321):

$$CS = \frac{c}{4}\cdot\frac{A^2+2Aa+3a^2}{A^2+Aa+a^2}$$

Zusatz. Für den Schwerpunkt S eines abgekürzten Kegels, dessen Radien R und r sind, hat man offenbar, wenn c den Abstand der beiden Mittelpuncte bezeichnet:

$$CS = \frac{c}{4}\cdot\frac{R^2+2Rr+3r^2}{R^2+Rr+r^2}$$

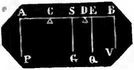
145.

Im Vorhergehenden haben wir die Schwerpuncte von den wichtigsten in der Praxis vorkommenden Flächen und Körpern bestimmt, und jedenfalls die Methode angegeben, nach welcher man in andern ähnlichen Fällen zu verfahren hat. Ganz unregelmässige Flächen und Körper muss man in solche Stücke zerlegen, deren Inhalte und Schwerpuncte sich bestimmen lassen und dann die allgemeine Methode § 134 anwenden.

Neuntes Buch.

Aufgaben zur Uebung.

146.



Aufgabe. An einem horizontalen, in zwei Puncten C, D unterstützten Balken wirken beliebig viele senkrechte Kräfte P, Q, V. Man sucht den Druck auf die Stützpuncte.

Auflösung. Will man auch das Gewicht G des Balkens berücksichtigen, so kann man sich dasselbe im Schwerpunct S vereint denken.

Ist nun Gleichgewicht vorhanden, so bleibt dasselbe bestehen, wenn man statt des Stützpunctes C den auf ihn Statt findenden und gesuchten Druck x in entgegengesetzter Richtung wirken liesse. Dann kann man aber D als Stützpunct eines zweiarmigen Hebels betrachten, und man hat:

$$P . AD - x . CD + G . SD = Q . ED + V . BD$$

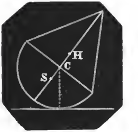
$$x = \frac{P . AD + G . SD - Q . ED - V . BD}{CD}$$

Heisst y der Druck auf den Stützpunkt D, so ist:

$$y = \frac{G . SC + Q . EC + V . BC - P . AC}{CD}$$

$$x + y = P + G + Q + V.$$

147.



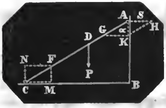
Aufgabe. Es ist der Radius einer Halbkugel $= r$ gegeben. Es wird die Seitenlinie x eines damit verbundenen graden Kegels von gleichem Material gesucht, so dass beide verbundene Körper auf einer horizontalen Ebene ein indifferentes Gleichgewicht haben (§ 51).

Auflösung. Wenn der gemeinschaftliche Schwerpunct beider Körper in den Mittelpunct C fällt, so ist derselbe in jeder Lage der die horizontale Ebene berührenden Halbkugel unterstützt, weil die Verticale durch den Berührungspunct immer durch den Mittelpunct C geht (Geometrie § 75). Es muss also x so gross sein, dass in Bezug auf den Stützpunct C die in den Schwerpuncten H und S wirkenden Gewichte gleiche Momente haben. Da nun das Volumen der Halbkugel $\frac{2}{3}r^3\pi$ und $CS = \frac{3}{8}r$ (§ 141, Zus.); ferner das Volumen des Kegels $= r^2\pi \cdot \frac{\sqrt{x^2-r^2}}{3}$ und $CH = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{x^2-r^2}$, so hat man (§ 135 Rdmkg.):

$$r^2\pi \cdot \frac{\sqrt{x^2-r^2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{x^2-r^2}}{4} = \frac{2}{3}r^3\pi \cdot \frac{3}{8}r, \text{ woraus:}$$

$$x = 2r.$$

148.



*) **Aufgabe.** Ein Balken liegt mit einem Ende C auf einer horizontalen Ebene und mit dem andern Ende A gegen eine verticale Wand. In D hängt eine Last P. Welche Pressungen wird dieselbe in A und C ausüben, wenn von der Reibung und dem Gewicht des Balkens abstrahirt wird, und $CD = a$, $AD = b$, $\widehat{CAB} = \alpha$ ist.

Auflösung. Die Kraft P zieht den Punct A nach verticaler Richtung mit einer Kraft $V = \frac{a}{a+b}$ P und den Punct C mit $V' = \frac{b}{a+b} \cdot$ P (§ 68). Die Kraft $V = AK$ zerlegen wir in

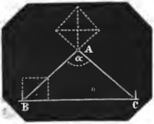
AH = S senkrecht auf die verticale Wand (§ 15) und in AG = x nach der Richtung des Balkens und es ist S = V . tg α, d. i.

$$S = \frac{a}{a+b} . P . \text{tg}\ \alpha.$$

Die Kraft AG = x = FC zerlegen wir in MC = KG = S und in NC = AK = $\frac{a}{a+b}$ P.

Die horizontalen Drücke in A und C (in der Baukunst der Sparrenschub genannt), sind also vollkommen gleich. Der verticale Druck in C ist = $\frac{a}{a+b} . P + \frac{b}{a+b} . P = P$.

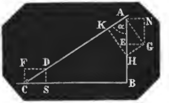
149.



*) **Aufgabe.** Zwei gleich lange Stangen sind in A durch ein Gelenk mit einander verbunden (Kniepresse). In A wirkt vertical eine Kraft = P. Welchen verticalen Druck hat die horizontale Ebene BC und welchen horizontalen Druck die Widerlagen in B und C auszuhalten?

Auflösung. Die in A wirkende Kraft P zerlegt sich in zwei Composanten nach den Richtungen der Stangen. Jede dieser in B und C drückenden Composanten zerlege man wieder nach verticaler und horizontaler Richtung, so ist in jedem der Puncte B und C der verticale Druck = ½ P und der horizontale Schub = ½ P . tg ½ α.

150.



*) **Aufgabe.** Druck und Schub zu bestimmen, wenn der Balken mit dem einen Ende A auf der verticalen Wand liegt, die Last P in der Mitte des Balkens wirkt und von der Reibung abstrahirt wird.

Auflösung. Statt der Kraft P lassen wir, parallel mit ihr, ½P in C und ½P = AH in A wirken. Die Kraft AH = ½ P zerlegen wir in AK = ½ P cos α, und AG = ½ P sin α senkrecht auf CA. Die Kraft AG zerlegt sich in AE, welche

durch den Widerstand AB aufgehoben wird, und in $AN = AG \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} P \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{4} P \sin 2\alpha$. Nimmt man $DC = AK = \frac{1}{2} P \cos \alpha$, so ist offenbar der aus dieser Kraft entspringende verticale Druck in C, nämlich: $FC = \frac{1}{2} P \cos^2 \alpha$ und der Schub $SC = \frac{1}{4} P \sin 2\alpha$. In C ist also der totale verticale $\text{Druck} = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} P \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} P (1 + \cos^2 \alpha)$.

Anmerkung. Mit dieser und den beiden vorhergehenden verwandte Aufgaben kommen viele in den Lehrbüchern über Baukunst vor.

151.



Aufgabe. Wie gross muss beim gleichseitigen Keil die Kraft K sein, welche den Seitendruck Q ausübt und zugleich mit der Reibung im Gleichgewicht ist? Es sei die Länge des Rückens $AB = r$, die Seitenlinie $AC = l$, die Höhe $CM = h$, der $\text{Reibungscoefficient} = f$.

Auflösung. Die Kraft, welche den Druck Q ausübt, muss nach § $96 = \frac{r}{l} \cdot Q$ sein. Stellt nun $CD = f \cdot Q$ die Grösse der an beiden Seiten Statt findenden Reibung dar, so ist die daraus entspringende $\text{Resultante } CE = 2 \frac{h}{l} \cdot fQ$, mithin:

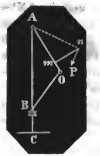
$$K = \frac{r}{l} Q + 2 \frac{h}{l} \cdot fQ$$

$$K = \frac{r + 2hf}{l} \cdot Q$$

152.

*) **Aufgabe.** Zwei in O verbundene Stangen AO, OB sind um die Gewinde A und O drehbar, der Punct B kann sich in der festen Falze AC bewegen. In n wirkt eine Kraft P, und zwar, als die vortheilhafteste Richtung, senkrecht auf der von A nach n gehenden Linie. Welche Pressung Q wird der Punkt B nach der Längenrichtung AC ausüben *), wenn $An = r$, $AO = a$, $\widehat{ABO} = B$, $\widehat{AOB} = O$ ist.

*) Die hier gegebene Theorie dieser ingenieusen einfachen Maschine, genou (Knie) genannt, welche in ihrer Wirkung der Schraube gleich kommt, findet man in Poinsot's éléments de statique.



Auflösung. Man denke sich von A auf die Richtung BO das Perpendikel AH gefällt, so ist $AH = a \,.\, \sin O$. Für die Kraft x, welche am Winkelhebel HAn mit P im Gleichgewicht sein würde, hat man:

$$x \,.\, a \sin O = P r \,\ldots\ldots\ldots (1)$$

Diese Kraft x, nach der Richtung OB wirkend, zerlegt sich in zwei, die eine senkrecht auf AB, welche von dem Widerstand der Maschine aufgehoben wird, und die andere gesuchte Q nach der Längenrichtung, und es ist:

$$Q = x \,.\, \cos B \,\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Beide Gleichungen mit einander multiplicirt, hat man:

$$Q = \frac{P r \cos B}{a \,.\, \sin O} \,\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Aus dieser Formel folgt:

1. Dass die Kraft am vortheilhaftesten senkrecht auf An gerichtet ist.

2. Die Pressung Q wird desto grösser, je kleiner a und je grösser r ist, und aus letzterm Grunde, je näher die Handhabe mn dem Puncte O ist.

3. So wie der Winkel B immer kleiner und folglich der Winkel O immer grösser wird, wird auch die Pressung Q immer grösser und wird für $B = 0$, $O = 180^0$, unendlich.

Anmerkung. Ist $AO = OB$, so ist der Aussenwinkel bei $O = 2B$ und dann (Trigon. § 100, 16):

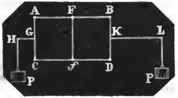
$$Q = \frac{P r}{2 a \sin B} \,\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Oder, wenn man in diesem Fall das von O auf AB gefällte Perpendikel mit b bezeichnet (indem dann $b = a \,.\, \sin B$), noch einfacher:

$$Q = \frac{r}{2 b} : P \,\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Wäre z. B. $P = 100$ ℔, $r = 3'$, $b = \frac{1}{2}''$, so wäre $Q = 3600$ ℔.

153.



Die Robervalsche Waage. Diese merkwürdige kleine Maschine bietet eine Erscheinung dar, welche scheinbar gegen statische Gesetze, namentlich gegen die Theorie

der Momente streitet und deshalb auch das statische Paradoxon genannt wird.

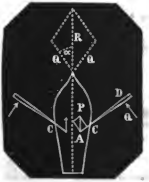
Es seien A B, C D zwei gleiche parallele, um ihre Mitten F, f (zwei in einer verticalen Leiste befindliche Stützpuncte) drehbare Hebel, deren Enden vermittelst Gewinde durch die Querstangen A C, BD verbunden sind, so dass also der eine Hebel den Bewegungen des andern stets folgen muss. Die Querstangen bleiben dabei stets vertical (wegen A C = BD ╨ Ff) und folglich die beiden daran rechtwinklig befestigten und gewichtlos gedachten Arme G H und KL stets horizontal. An den Enden H und L dieser Arme wirken rechtwinklig zwei gleiche Gewichte P, P und es zeigt sich nun der unerwartete Umstand, dass diese Maschine in jeder Lage im Gleichgewicht ist, ob die Arme GH, KL gleiche oder ganz verschiedene Länge haben. Wie geht das zu?

Poinsot zeigt durch die Theorie des Kräftenpaars die Nothwendigkeit des Gleichgewichts auf folgende Weise:

In K lasse man zwei verticale, dem Gewichte + P gleiche und entgegengesetzte Kräfte + P′, — P′ wirken, so hat man ausser der Kraft + P′ noch ein Kräftenpaar (P, — P′) an dem Hebelarm KL. Dieses Kräftenpaar kann man auf ein anderes (Q, — Q) reduciren, dessen Hebelarm = BD ist (§§ 124, 126), alsdann wird dieses Kräftenpaar (Q, — Q) offenbar durch die festen Stützpuncte F, f vernichtet, und in K wirkt nur noch die Kraft P′ = P. Ebenso ist es an der andern Seite.

Das Gleichgewicht findet auch Statt, wenn man den einen horizontalen Hebelarm H G z. B. innerhalb des Parallelogramms Af annimmt.

154.



*) **Aufgabe.** Zu erklären, welche Kraft beim Rudern ein Boot (Jolle) vorwärts treibt.

Auflösung. Obgleich dies Problem eigentlich in die Dynamik gehört, so lässt es sich doch auf ein rein statisches zurück führen, indem, weil Wirkung und Gegenwirkung immer gleich sind, hier wohl als begreiflich vorausgesetzt werden darf, dass es ganz einerlei ist, ob die Fläche D des Ruders sich mit

einer gewissen Geschwindigkeit gegen das ruhende Wasser bewegt und drückt, oder ob umgekehrt das Wasser sich mit derselben Geschwindigkeit senkrecht gegen die ruhende Fläche des Ruders bewegt und darauf drückt. Zieht die eine Hand nun mit einer Kraft P parallel mit der Richtung des Kiels, so würde die in D zum Gleichgewicht erforderliche Kraft $Q = \frac{AC \cdot \cos\alpha}{CD} \cdot P$ sein, wo α den veränderlichen Winkel bezeichnet, den die Richtung der Kraft Q (Widerstand des Wassers)*) mit der Richtung des Kiels macht. Die Resultante R aus den beiderseitigen Widerständen des Wassers ist also:

$$R = 2\,Q\cos\alpha = \frac{2AC \cdot \cos^2\alpha}{CD} \cdot P$$

und diese Kraft R ist es, welche das Boot vorwärts treibt; denn die Füsse drücken das Boot ebenso stark zurück, als die Hände es vorwärts drücken.

155.

*) **Aufgabe.** Vermittelst eines horizontalen einarmigen Hebels soll eine Last $Q = 64$ ℔. durch eine Kraft $P = 10$ ℔. im Gleichgewicht erhalten werden. Der Hebelarm der Last ist $q = \frac{1}{2}'$. Wie lang muss der Hebelarm der Kraft sein, wenn der laufende Fuss des prismatischen Hebels $m = 1$ ℔. wiegt und Kraft und Last senkrecht am Hebel wirken.

Auflösung. Sei die gesuchte Länge des Hebels $= p$, folglich sein Gewicht $= pm$. Dies Gewicht kann man im Schwerpunct, der um $\frac{1}{2}p$ vom Stützpunct entfernt ist, angebracht denken. Für den Zustand des Gleichgewichts muss also sein (§ 73):

$$Qq + pm \cdot \tfrac{1}{2}p = Pp.$$

Hieraus findet man (Algebra § 217):

$$p = \frac{\pm\sqrt{P^2 - 2qmQ}.}{m}$$

Für das angenommene Zahlenbeispiel hat man also $p = 4'$ und auch $p = 16'$.

---

*) In der Dynamik wird gezeigt, dass der Widerstand Q ziemlich nahe dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional wächst. Damit also eine mässige Geschwindigkeit des Punctes A eine bedeutende in D erzeugt, muss der Hebelarm AC klein gegen CD sein.

Druck der Hofbuchdruckerei (H. A. Pierer) in Altenburg.

II. Theil.

Hydrostatik.

Zehntes Buch.

Von einigen Eigenschaften der tropfbar flüssigen Körper.

156.

Die Wissenschaft vom Gleichgewicht der tropfbar flüssigen Körper wird, wie schon in der Einleitung erwähnt, Hydrostatik genannt. Die beiden ersten Sylben bedeuten Wasser und man hat dieses deshalb als Stellvertreter aller tropfbar flüssigen Körper gewählt, weil unter diesen das Wasser, wegen seiner vielfältigen mechanischen Benutzung, als Träger grosser Lasten, als treibende Kraft der Mühlen und anderer Maschinen, ferner bei Wasserleitungen, Schleussen-, Canalbau etc. am häufigsten in Betracht kommt und weil die Gesetze vom Gleichgewicht des Wassers auch für alle übrigen tropfbar flüssigen Körper gelten. Um zur Kenntniss dieser Gesetze zu gelangen, müssen wir uns erst einige, den tropfbar flüssigen Körpern gemeinsame Eigenschaften merken.

157.

Bei den Körpern, welche wir feste nennen, hängen die einzelnen Theilchen (Molecüle, Atome) derselben durch eine

unbekannte Ursache (Cohäsion) so fest mit einander zusammen, dass die Körper dadurch eine selbstständige Form annehmen. Bei den Körpern dagegen, welche wir tropfbar flüssige nennen, ist dieser Zusammenhang (Cohäsion) so äusserst gering, dass diese Körper (der Anziehungskraft der Erde unterworfen) dadurch keine selbstständige Gestalt annehmen können, und deshalb in einem Gefässe gefasst werden müssen Ein Stück Eis kann man wohl anfassen, ein Stück Wasser aber nicht. Dass jedoch immer noch ein, wenn auch noch so schwacher Zusammenhang (Cohäsion) Statt findet, folgt daraus, dass diese Flüssigkeit, woher sie auch ihren Namen hat, Tropfen (Kügelchen) bildet, und dass ein Tropfen in kleinere zertheilt werden kann, die also vorher doch mit einander zusammenhingen. Bei den folgenden Betrachtungen können wir indessen von dieser äusserst geringen Cohäsionskraft ganz absehen, sie = 0 setzen.

158.

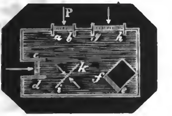
Eine andere merkwürdige Eigenschaft der tropfbar flüssigen Körper, wodurch sie sich noch von den festen Körpern unterscheiden, besteht darin: dass alle (?) festen Körper, selbst die dichtesten (Gold, Platin) sich merklich zusammen drücken (verdichten) lassen, die tropfbar flüssigen (luftleeren) Körper dagegen aber so wenig, dass wir bei den folgenden Betrachtungen auch hiervon ganz absehen, die Zusammendrückung = 0 annehmen können.

Hat man z. B. Wasser in einem unausdehnsamen Cylinder von einem Quadratzoll Grundfläche und drückt darauf mittelst eines Kolbens mit einer Kraft von 15 ℔, so erleidet das Wasser nur die fast unmerkliche und nur theoretisch zu beachtende Zusammendrückung von kaum $\frac{1}{20000}$ seines Volumens (Quecksilber nur $\frac{1}{400000}$). Hört der Druck auf, so geht auch der Kolben sogleich wieder zurück und die tropfbare Flüssigkeit dehnt sich genau um die kleine erlittene Volumenänderung wieder aus.

159.

Eine dritte sehr wichtige Eigenschaft der tropfbar flüssigen Körper, ohne deren Entdeckung gar keine Wissenschaft von dem Gleichgewicht derselben hätte entstehen können, ist das

sogenannte Princip: von der Fortpflanzung des gleichen Drucks nach allen Richtungen, welches zuerst von d'Alembert als das Fundament der ganzen Hydrostatik aufgestellt wurde.



Wird nämlich auf eine in einem Gefäss von ganz beliebiger Form eingeschlossene Flüssigkeit vermittelst eines Kolbens an irgend einer Stelle ein Druck P, z. B. von 100 ℔. ausgeübt, so pflanzt sich dieser Druck durch die ganze Flüssigkeit hindurch ungeschwächt fort, so nämlich, dass (vom Gewichte der Flüssigkeit abgesehen) jede ebene Fläche, sie möge sich an den Wänden oder in der Flüssigkeit befinden, einen auf ihr senkrechten Druck auszuhalten hat, welcher sich zu der Kraft P verhält, wie die gedrückte Fläche zu der drückenden Fläche *ab*.

Wären z. B. die ebenen Flächen *cd*, *ef* just so gross, als die mit P = 100 ℔. drückende Kolbenfläche *ab*, so würde jede auch denselben Druck von P = 100 ℔. auszuhalten haben. Wären die Flächen *gh*, *ik* zweimal so gross als *ab*, so würde jede auch einen Druck von 2 P = 200 ℔. erleiden.

Dass dies wirklich so ist und durch die mit P = 100 ℔. drückende Kolbenfläche *ab* eine durch die ganze Flüssigkeit sich erstreckende (schon nach § 158 zu vermuthende) Spannung erzeugt wird, vermöge welcher die Flüssigkeit, so wie auch jeder Theil derselben (gleich wie ein vollkommen elastischer Körper) sich nach allen Richtungen auszudehnen (auszuweichen) bestrebt ist, um ihre, wenn auch noch so kleine Volumenänderung wieder herzustellen und folglich auch eine *m* mal so grösse Fläche einen *m* mal so grossen Druck auszuhalten hat, weil *m* mal so viele Theile (die ausweichen wollen) darauf wirken, liess sich leicht durch ein Experiment bestätigen, indem man an verschiedenen Stellen eines mit Wasser gefüllten Gefässes Röhren mit wasserdicht beweglichen Kolben anbrachte. Liess man nun einen der Kolben mit einer Kraft P auf die eingesperrte Flüssigkeit drücken, so wurde jeder der andern hinausgetrieben und um dies zu verhüten (um Gleichgewicht herzustellen), mussten auf die übrigen Kolben Kräfte wirken, die sich wie ihre Grundflächen verhielten.

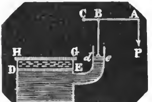
Dass dieser fortgepflanzte Druck nicht bloss an den Seitenflächen, sondern auch innerhalb der Flüssigkeit Statt findet, liess sich leicht zeigen, indem man ein Rohr *cd* in die Flüssigkeit hineintreten liess, oder auch ein so eingerichtetes Hohlgefäss in die Flüssigkeit stellte, dass ein Kolben *ef* durch eine bestimmte Kraft sich wohl einwärts treiben liess, aber nicht wieder zurück gehen konnte. — Denselben Druck P, den der Kolben *ab* auf die eingesperrte Flüssigkeit ausübt, übt diese offenbar wieder in entgegengesetzter Richtung auf den Kolben aus, weil die Flüssigkeit ja, gleich wie ein elastischer Körper, die erlittene kleine Volumenänderung stets wieder herzustellen bestrebt ist (§ 158). Ebenso ist klar, dass der Druck, den der Kolben *ab* auf eine beliebige, in der Flüssigkeit gedachte Fläche *ik* ausübt, auch in entgegengesetzter Richtung Statt findet, kurzum, die durch einen Druck bewirkte Spannung ist durch die ganze Flüssigkeit hindurch überall dieselbe.

160.

Wir haben vorstehenden wichtigen Satz, von der ungeschwächten Fortpflanzung des Drucks, deshalb so umständlich besprochen, weil er das Fundament der ganzen Hydrostatik ist. Alle folgenden Sätze können ohne weitere Experimente, bloss durch reine Vernunftschlüsse mit mathematischer Nothwendigkeit und Sicherheit, als einfache Folgerungen, daraus abgeleitet werden.

161.

Aufgabe. Zwei mit einander verbundene Gefässe, in welchen die Kolben *de*, DE wasserdicht beweglich sind, seien, wie angedeutet, mit Wasser gefüllt. Vermittelst eines in C unterstützten einarmigen Hebels und der in B eingehängten Stange drückt eine Kraft P = 20 ℔ auf den Kolben *de*. Welchen Druck Q erleidet dadurch die bewegliche Platte DE aufwärts (um die zwischen ihr und der festen Platte GH befindliche Sache, z. B. Papierballen etc. zusammenzupressen), wenn die Grundflächen $de = f = 1$ □″, $DE = F = 1$ □′ 10 □″ und die Hebelarme $BC = l = 6''$, $AC = L = 2'$ sind?



Auflösung Der Druck auf den Kolben de ist $= \frac{L}{l}$ P, und da sich dieser Druck gleichmässig durch die ganze Flüssigkeit fortpflanzt, so ist, von der Reibung abstrahirt, nach § 159 der fragliche senkrechte Druck auf die Platte DE, nämlich:

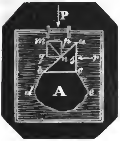
$$Q = \frac{F}{f} \cdot \frac{L}{l} \cdot P$$

$$Q = 12320 \text{ ℔.}$$

Anmerkung 1. Man kann also vermittelst der tropfbaren Flüssigkeit mit einer sehr kleinen Kraft eine sehr grosse Wirkung ausüben. Man sieht aber, dass auch hier wieder das § 64 erwähnte Princip der virtuellen Geschwindigkeit Statt findet.

Anmerkung 2. Die Figur stellt die vielfach Anwendung findende sogenannte hydraulische Presse in ihrer ursprünglich einfachen Gestalt dar. Ihre jetzige Einrichtung ist mit einer Pumpe verbunden, die erst in der Aërostatik erklärt werden kann.

162.



Lehrsatz. Wird auf eine eingeschlossene tropfbare Flüssigkeit, in welcher sich ein Körper A im Gleichgewicht befindet, ein Druck P ausgeübt, so bleibt der Körper im Gleichgewicht, wie auch dessen Oberfläche geformt sein möge, oder was dasselbe ist, ein beliebiger Theil seiner Oberfläche hat, nach einer beliebigen Richtung, einen just so starken Druck auszuhalten, als die auf dieser Richtung senkrechte Projection der gedrückten Fläche.

Beweis. Sei ac die Projection von der ebenen Fläche ab. Weil nun (vom Gewichte der Flüssigkeit abgesehen) alle Puncte irgend einer Begrenzungsfläche denselben normalen Druck erleiden, so kann man die totalen Drücke auf ab und ac in den Schwerpuncten n und s annehmen. Diese normalen Drücke mn und rs verhalten sich also wie die Flächen ab und ac. Den Druck mn zerlegen wir in qn senkrecht auf ac und pn parallel mit ac.

Die beiden rechtwinkligen Dreiecke abc und mnq sind ähnlich, daher:

$$qn : mn = ac : ab.$$

Wäre z. B. die Fläche ac halb so gross, als ab, so wäre auch der Druck qn halb so gross, als mn und folglich $qn = rs$. Ebenso verhält es sich mit dem Drucke auf die übrigen Flächen, wie bd, ce etc., indem man sich krumme Flächen in ihre Elemente zerlegt denken kann Der in der Flüssigkeit im Gleichgewicht befindliche Körper A wird sich also nach keiner Seite hin bewegen. Dieselben Schlüsse gelten offenbar von den Wänden des Gefässes, worin die Flüssigkeit eingeschlossen ist.

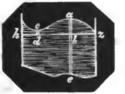
163.

Die bisher erwähnten Eigenschaften der tropfbaren Flüssigkeiten, nämlich: der sehr geringe Zusammenhang und die dadurch entstehende äusserst leichte Trennung und Verschiebbarkeit ihrer kleinsten Theilchen, ferner die äusserst geringe Zusammendrückbarkeit und die Fortpflanzung des gleichen Drucks sind ganz unabhängig von der Anziehungskraft der Erde, d. h. die tropfbaren Flüssigkeiten würden die erwähnten Eigenschaften behalten, wenn sie auch gar kein Gewicht hätten. Da sie aber wie alle andern Körper der Schwerkraft (von welcher wir bisher abstrahiren konnten) unterworfen sind und dadurch Gewicht bekommen, so wollen wir jetzt auch dies mit in Betracht ziehen und sehen, welche Erscheinungen sich hieraus mathematisch voraussagen lassen.

Elftes Buch.

Gestalt der freien Oberfläche tropfbar flüssiger Körper; Druck auf den Boden und die Seitenwände eines Gefässes.

164.



Lehrsatz. Die freie Oberfläche (Niveau) einer ruhigen tropfbaren Flüssigkeit ist immer horizontal.

Beweis. Man denke sich in dem Gefässe eine horizontale Ebene hz und die darüber befindliche Flüssigkeit in lauter verticale Säulchen ab, cd etc. getheilt. Jeder Tropfen wird von der Schwerkraft nach verticaler Richtung angezogen. Das kleine Flüssigkeitsprisma ab drückt also mit seinem ganzen Gewicht auf die horizontale Grundfläche b. Hier entsteht also eine Spannung, gerade so, als wenn sie durch den Druck eines Kolbens verursacht wäre. Dieser Druck (Spannung) pflanzt sich nach allen Richtungen fort, z. B. vertical nach unten, welcher Druck von dem Widerstand (Unzusammendrückbarkeit) der Flüssigkeitssäule be im Gleichgewicht erhalten wird, vertical nach oben, welcher Druck durch das ihn verursachende Gewicht der Säule ab compensirt wird, dann aber auch nach allen horizontalen Richtungen in der Ebene hz, z. B. von b nach d. Wäre nun der Gegendruck in derselben horizontalen Ebene hz von den um ab nahe oder entfernt liegenden Flüssigkeitssäulen nicht derselbe; hätte z. B. eine oder einige

Säulen von ab verschiedene Höhen, also auch verschiedenes Gewicht, so kann auch kein Gleichgewicht Statt finden. Die niedrigeren Säulen müssen sich nothwendig heben, die höhern sinken (indem an ihrem untern Ende, wo der Druck am stärksten ist, die Flüssigkeit zur Seite ausweicht)*), bis alle über einer beliebig in der Flüssigkeit angenommenen Horizontal-Ebene hz stehenden Flüssigkeitssäulen gleiche Höhe haben, mithin die Oberfläche, wie behauptet, eine horizontale und wenn die Ausdehnung sehr gross ist, nach der Gestalt der Erde gekrümmt und an jeder Stelle auf der Verticallinie senkrecht ist.**) Von jetzt an soll immer Wasser der tropfbare flüssige Körper und das Gewicht eines Cubikfusses desselben $\gamma = 66$ ℔. sein.

165.

Lehrsatz. Wenn der Boden eines Gefässes horizontal ist, so drückt das darin enthaltene Wasser darauf mit einer Kraft gleich dem Gewichte eines Wasserprismas, dessen Grundfläche der Boden und dessen Höhe gleich dem Abstande des Wasserspiegels (Niveau) vom Boden ist, die Wände mögen dabei beschaffen sein, wie sie wollen.

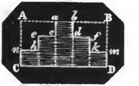
Beweis 1. Sind die Seitenwände vertical, so ist der Satz leicht einzusehen. Denn wegen des äusserst geringen Zusammenhangs der Theilchen des Wassers kann dasselbe nicht wie ein fester Körper von der Reibung an den Wänden getragen werden, und weil die freie Oberfläche horizontal ist, mithin alle verticalen Flüssigkeitssäulchen (Wasserfäden) gleiche Höhe haben, so drückt jedes und mithin das ganze verticale Wasserprisma mit seinem vollen Gewichte auf den horizontalen Boden. Hätte z. B. der Boden $F = 6$ Quadratfuss und der Wasserspiegel $h = 3$ Fuss Höhe über demselben, so wäre der Druck auf den Boden $P = hF\gamma = 3 \cdot 6 \cdot 66 = 1188$ ℔.

---

*) Ueber die hier Statt findende merkwürdige Bewegung (Wellenbewegung) einer nicht im Gleichgewicht befindlichen tropfbaren Flüssigkeit sehe man die Wellenlehre der Gebrüder Weber. An einem schwimmenden Stück Holz kann man leicht bemerken, dass eine Welle nicht, wie es auf den ersten Blick scheint, fortläuft, sondern sich nur auf und nieder bewegt.

**) Die Erscheinung, dass die Flüssigkeit an den Seitenwänden der Gefässe in die Höhe gezogen oder niedergedrückt wird (die Capillarität), lassen wir hier ausser Acht.

2. Es bestehe das mit Wasser gefüllte Gefäss aus mehren, z. B. drei prismatischen Körpern, deren verticale Seitenwände jede = 1' hoch, und deren horizontale Durchschnitte *cd*, *hk*, CD respective ein, drei und fünf Quadratfuss. Im obern Theil des Gefässes ist nun gerade 1 Cubikfuss Wasser enthalten und also der Druck auf die horizontale Schicht *cd* = 66 ℔. Dieser Druck pflanzt sich nun (als wenn er vermittelst eines Kolbens ausgeübt wäre) ungeschwächt durch die ganze Flüssigkeit fort, wirkt also auch auf die verticalen Seitenwände *eh*, *n*C etc., welchen Seitendruck wir im nächsten § näher betrachten wollen, dann aber auch vertical, von unten nach oben, auf jede der 1 □' grossen horizontalen Flächen *ec*, *df* mit 66 ℔., so dass also dieser Druck das Gefäss mit 2mal 66 ℔ in die Höhe zu heben bestrebt ist.



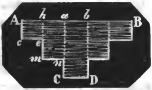
Der Druck auf die Schicht *cd* = 66 ℔. pflanzt sich ferner fort von oben nach unten, und drückt auf jeden Quadratfuss der Schicht *hk* mit 66 ℔. Da aber das in der Abtheilung *ehkf* enthaltene Wasser auch Gewicht hat, so beträgt der Druck auf jeden Quadratfuss der Schicht *hk* jetzt 2 . 66 ℔. Derselbe Druck wirkt auch wieder von unten nach oben auf die 1 □' grossen Flächen *nh*, *km*, ferner auf jeden Quadratfuss des horizontalen Bodens CD mit 2 . 66 ℔. Rechnen wir hiezu den Druck, den das in der Abtheilnng *n*CD*m* enthaltene Wasser schon von selbst auf CD ausübt, so ist klar, dass der Druck auf den horizontalen 5 □' grossen Boden 3 . 66 . 5 = 990 ℔. beträgt, mithin ganz derselbe ist, als wenn die verticalen Wände *n*C, *m*D bis zum Niveau von *ab* reichten, und die gebrochenen Wände *ac*, *eh* etc. gar nicht da wären.

Anmerkung 1. Man kann sich hier auch folgende Vorstellung machen: In dem ganz gefüllten Gefäss ACDB denke man sich einen beliebigen Theil der Flüssigkeit durch die Flächen *ac*, *ce*, *eh*, *hn*, etc. begrenzt, und diese Grenzen nun als feste, mit dem horizontalen Boden CD verbundene Wände, so bleibt offenbar Gleichgewicht und der horizontale Boden wird noch eben so stark gedrückt, als vorhin.

Anmerkung 2. Obwohl in unserm Beispiel der Druck auf jeden Quadratfuss des horizontalen Bodens CD 3 . 66 = 198 ℔,

mithin der totale Druck 5 . 198 = 990 ℔ beträgt, so ist doch der Druck, den das Gefäss selbst auf eine horizontale Unterlage (Waagschaale) ausübt, in der That nur gleich dem Gewichte des im Gefässe enthaltenen Wassers (das Gefäss selbst gewichtlos gedacht).

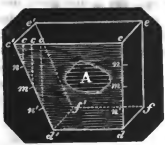
Um diesen scheinbaren Widerspruch (das sogenannte hydrostatische Paradoxon) aufzuklären, bedenke man, dass das Wasser das Gefäss nicht allein vertical nach unten, sondern auch nach oben drückt, nämlich die horizontalen Flächen *ec*, *df* jede mit 66 ℔, ferner *mk*, *hn* jede mit 2 . 66, mithin das Gefäss 6 . 66 = 396 ℔ zu heben bestrebt ist, nämlich mit dem Gewicht des noch erforderlichen Wassers, um das Gefäss ACDB ganz voll zu machen. Der Druck auf die Waagschaale beträgt also wirklich nur 990—396 = 9 . 66 = 594 ℔. Die Sache verhält sich gleichnissweise, als wenn eine elastische Feder, deren Gewicht = 594 ℔, das Gefäss nach entgegengesetzten verticalen Richtungen mit 396 ℔ drückte.



Hat das Gefäss die nebenstehende Form, so ist klar, dass der horizontale Boden CD nur das Gewicht der verticalen Säule *a*CD*l* zu tragen hat, indem die andern Säulen, wie *anmh*, *hec*A etc., auf die horizontalen Wände *mn*, *ce* etc. also nicht auf den eigentlichen Boden CD drücken. Es ist also in diesem Fall der Druck auf den Boden CD nicht so gross als der Druck, den das Gefäss auf eine horizontale Unterlage (Waagschaale) ausübt. (Vergleiche Anmerkung 1 und 2.)

Stellt man sich vor, die stufenförmigen Absätze der Seitenwände würden immer kleiner und kleiner, so bleibt der Druck auf dem horizontalen Boden des sich nach oben verengenden oder erweiternden Gefässes offenbar immer derselbe. Dass dies auch noch der Fall ist, wenn die stufenförmigen Absätze ganz verschwinden und die Seitenwände ebene oder krumme Flächen werden, wollen wir im nächsten § zeigen, es erhellet dies übrigens auch schon aus der Anmerkung 1.

166.



Lehrsatz. Der Druck auf jede benetzte ebene Wand oder jede untergetauchte ebene Fläche ist immer gleich dem Gewichte eines Wasserprismas, dessen Grundfläche die gedrückte ebene Fläche und dessen Höhe gleich dem Abstande des Schwerpuncts derselben vom Wasserspiegel ist.

Beweis. Es sei die gedrückte Wand zuerst ein Rechteck mit zwei horizontalen Seiten *ce*, *df*. Betrachten wir hier zuerst den Druck auf die verticale oder schräge Linie *cd*, *c'd'*. Wegen des Princips von der Fortpflanzung des gleichen Druckes nach allen Richtungen hat der Schwerpunct *m* dieser Linien einen darauf senkrechten Druck auszuhalten, der gleich dem Gewichte des Wasserfadens *cm* ist. Liegt der gedrückte Punkt *n*, *n'* .. um die Hälfte ($\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ...) der Entfernung des Schwerpuncts vom Wasserspiegel höher oder tiefer, so hat er (wegen des um so viel kürzern oder längern Wasserfadens *cn*, *cn'*) offenbar auch einen um die Hälfte ($\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ...) kleinern oder grössern Druck auszuhalten. Um so viel der Punct *n* z. B. schwächer gedrückt wird, als der Schwerpunct *m*, um just so viel wird der Punct *n'* stärker gedrückt. Was also den totalen senkrechten Druck auf die Linien *cd*, *c'd'* anbetrifft, so ist derselbe offenbar ebenso gross, als wenn jeder Punct der Linie *cd* oder *c'd'* denselben Druck wie der Schwerpunct *m* (arithmetisches Mittel) auszuhalten hätte, und da dies von allen mit *cd*, *c'd'* parallelen Linien der rechteckigen Wände *ed*, *e'd'* gilt, so gilt es auch von diesen selbst.

Hat die ebene Seitenwand oder ein Theil A derselben eine andere beliebige Form und Lage, so denke man sich dieselbe in unendlich schmale horizontale Elementarstreifen, die man als Rechtecke betrachten kann, getheilt, deren Inhalte respective a', a'', a''', ... und die Entfernung ihrer Schwerpuncte vom Niveau *cc'* beziehlich z', z'' z''' ... ist, so sind, wie eben für verticale oder schräge Rechtecke gezeigt, wenn γ das Gewicht eines Cubikfusses Wasser bedeutet, die parallelen Drücke auf diese Elementartheilchen, beziehlich: $a'z'\gamma$, $a''z''\gamma$, ...

Bezeichnet man die ganze Fläche mit A, den Abstand ihres Schwerpuncts vom Wasserspiegel mit z, und denkt man sich alle Puncte der Fläche nach verticaler Richtung von der Erde angezogen, mithin die einzelnen Flächenstreifen a', a'', a''', ... als schwer und das Gewicht der Flächeneinheit $= 1$ gesetzt, so hätte man zur Bestimmung dieser Ordinate z des Schwerpuncts, indem, in Bezug auf die Oberfläche des Wassers, welche die Ebene xy vorstellt, das Moment der ganzen Fläche Az gleich der Summe der Momente $a'z'$, $a''z''$,... sein muss (§ 134):

$$Az = a'z' + a''z'' + a'''z''' + \ldots$$

Multiplicirt man beiderseits mit γ, so ist:

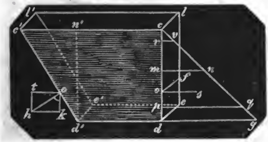
$$Az\gamma = a'z'\gamma + a''z''\gamma + a'''z'''\gamma + \ldots$$

Die rechte Seite stellt die Summe (Resultante) aller auf die Elementarflächen a', a'', ... von der Flüssigkeit herrührenden parallelen Drücke dar, und da diese $= Az\gamma$ und $Az =$ dem Inhalt eines Prismas ist, dessen Grundfläche $=$ A und Höhe $= z$, so ist der Lehrsatz allgemein bewiesen.

Zusatz. Der Druck auf eine untergetauchte ebene Fläche A bleibt immer derselbe, wenn man sie um ihren Schwerpunct beliebig dreht, z. B. in horizontale Lage bringt. Ebenso ist klar, dass gleich grosse untergetauchte ebene Flächen, deren Schwerpuncte gleich tief unterm Niveau liegen, gleichen Druck auszuhalten haben. So hat z. B. eine ebene Fläche von 4 Quadratfuss, deren Schwerpunct 10 Fuss unterm Niveau liegt, einen normalen Druck von $4 . 10 . 66 = 2640$ ℔ auszuhalten.

167.

Mittelpunct des Drucks. Da die auf die Elementartheilchen einer nicht horizontalen ebenen Seitenwand normal drückenden, also parallelen Kräfte nicht gleich sind, indem die tiefer liegenden Puncte stärker gedrückt werden, so muss offenbar auch der Mittelpunct der Resultante dieser parallelen Drücke, welcher hier Mittelpunct des Drucks heisst, tiefer als der Schwerpunct der gedrückten Fläche liegen.



Für eine rechteckige Wand mit zwei horizontalen Seiten $c\,l$, $d\,e$ (und dies ist der practisch wichtigste Fall), findet man diesen Punct, indem man ihn erst für die verticale oder schräge Linie $c\,d$, $c'd'$ sucht.

Sei die auf cd senkrechte Linie $dg = cd$, so stellt jede in dem Dreiecke cdg auf cd senkrechte Linie, wie pq, mn,... (weil sie gleich der Länge der entsprechenden Wasserfäden cp, cm,... sind), den normalen Druck dar, den die Puncte p, m, r, d auszuhalten haben.

Den Druck dg auf den Punct d kann man sich auf alle Puncte der Linie dg gleichmässig vertheilt denken, ebenso den Druck rv auf alle Puncte der Linie rv etc., so dass alle Puncte der mit dg parallelen Linien (d. h. alle Puncte des Dreiecks cdg) nach den Richtungen dieser Linien (nämlich senkrecht auf cd) mit gleichen Kräften gezogen werden. Denkt man sich diese gleichen Kräfte senkrecht auf die Fläche des Dreiecks gerichtet, so fällt der Mittelpunct ihrer Resultante offenbar mit dem Schwerpunct s des Dreiecks cdg zusammen. Stellt man sich nun vor, diese gleichen Kräfte drehten sich alle wieder in auf cd senkrechten Richtungen, so muss die Richtung ihrer Resultante noch durch denselben Punct s gehen (§ 36, Zusatz), so dass also, weil s der Schwerpunct des Dreiecks cdg ist, der Angriffspunct o, der sogenannte Mittelpunct des Drucks, um $\frac{2}{3}$ der Linie cd unter dem Wasserspiegel liegt, $co = \frac{2}{3}\,cd$ (§ 46), und da dieses von jeder mit cd parallelen Linie gilt, so gilt dies auch von der ganzen rechteckigen Wand, sie möge vertical oder schräg sein (cd, $c'd'$), wenn nur zwei Seiten horizontal sind. Der Mittelpunct des Drucks liegt also in der Mitte der mit de parallelen Linie of.

168.

Aufgabe. Es sei in dem mit Wasser gefüllten prismatischen Gefäss mit rechteckigem horizontalem Boden $d e e' d'$ und zwei rechteckigen Seitenwänden, eine verticale $c e$ und eine schräge $c' e'$ und zwei gleiche verticale $c' d$, $l' e$, die Seite $d d' = a = 6'$, $d e = b = 3$, $c d = c = 4$, $c' d' = c' = 5'$ (Figur § 167). Wie gross ist der Druck auf den Boden nnd auf die Seitenwände?

Auflösung. Der Druck auf den Boden ist:

$$\mathrm{P} = a b c \gamma = 6 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 66 = 4752 \text{ ℔.}$$

Der Druck auf die verticale Seitenwand $c e$ ist (§ 166):

$$\mathrm{P}' = b c \,.\, \tfrac{1}{2} c \,.\, \gamma = 3 \,.\, 4 \,.\, \tfrac{4}{2} \,.\, 66 = 1584 \text{ ℔.}$$

Der normale Druck auf die schräge Wand $c' e'$ ist:

$$\mathrm{P}'' = b c' \,.\, \tfrac{1}{2} c \,.\, \gamma = 3 \,.\, 5 \,.\, \tfrac{4}{2} \,.\, 66 = 1980 \text{ ℔.}$$

Der Druck auf jede der beiden verticalen trapezförmigen Wände ist, weil $c' n' = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$, mithin $c c' = e = 9'$ (§ 139, Anmerkung):

$$\mathrm{P}''' = \frac{a + e}{2} \cdot c \cdot \frac{c}{3} \cdot \frac{2 a + e}{a + e} \gamma = \tfrac{15}{2} \,.\, 4 \,.\, \tfrac{4}{3} \,.\, \tfrac{21}{15} \,.\, 66 = 3696 \text{ ℔.}$$

Der Mittelpunct des Drucks o liegt für die beiden rechteckigen Wände gleich tief unter dem Wasserspiegel, nämlich $\frac{2}{3} c = \frac{2}{3} \,.\, 4 = 2\frac{2}{3}'$ tief.

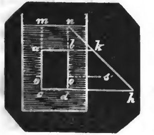
Der normale Druck $o h = \mathrm{P}'' = \frac{1}{2} b c c' \gamma$ auf die schräge Wand zerlegt sich in die beiden, horizontalen und verticalen, Drücke $o t$, $o k$, und es ist, wie schon aus § 162 erhellt, und auch hier aus den ähnlichen Dreiecken $o h k$ und $d' c' n$ folgt, der **horizontale** Druck auf beide rechteckigen Seitenwände gleich gross, so dass das Gefäss nach keiner Seite hin geschoben wird. Es ist nämlich $o t = z$ gesetzt: $z : \mathrm{P}'' = c : c'$, woraus:

$$z = \frac{c}{c'} \mathrm{P}'' = \frac{c}{c'} \cdot \tfrac{1}{2} b c c' \gamma = \tfrac{1}{2} b c c \gamma = \mathrm{P}'$$

Für den verticalen Druck hat man $o k = v$ und $c' n' = m$ gesetzt, $v : \mathrm{P}'' = m : c'$, woraus: $v = \frac{m}{c'} \mathrm{P}'' = \frac{1}{2} c m b \gamma$. Dies ist aber, wie (aus § 165) zu erwarten, das Gewicht des von den beiden parallelen dreieckigen und den beiden rechteckigen

Wänden begrenzt gedachten Wassers, nämlich $= \frac{mc}{2} \cdot b\,\gamma =$ $\frac{3\,.\,4}{2}\,.\,3\,.\,66 = 1188$ tt. Mit 1188 tt. wird also das Gefäss stärker auf eine Waagschaale, als das darin enthaltene Wasser auf den horizontalen Boden drücken. Wäre die schräge Wand, bei gleicher Neigung gegen den Horizont, statt nach aussen, nach innen gekehrt, so würde der Druck auf die Waagschaale um 1188 tt. geringer sein, als der Druck auf den horizontalen Boden. Das § 165 erwähnte hydrostatische Paradoxon ist also hiemit vollständig erklärt, indem man krumme Seitenflächen in ihre Elemente zerlegt denkt.

169.



Aufgabe. In einer verticalen Seitenwand befindet sich eine rechteckige Klappe mit zwei horizontalen Seitenlinien ab, cd. Die Klappe ist um eine horizontale Achse oo so drehbar, dass der obere Theil ao sich auswärts, der untere co sich also einwärts bewegt. Es ist $ac = a = 2'$, $am = c = 4'$, Man fragt, in welcher Höhe über der untern Seite cd die horizontale Achse oo liegen muss, damit die Klappe unter dem Drucke des Wassers geschlossen bleibt?

Auflösung. Die Breite der Klappe kommt hier nicht in Betracht. Man braucht den Mittelpunct des Drucks nur für die verticale Linie bd zu suchen.

Setzt man die Entfernung desselben von cd, nämlich do, $= x$, denkt die horizontale Linie $dh = nd = a + c$ gezogen und n mit h verbunden, so ist die horizontale Linie $bk = nb = c$, und man findet dann, durch dieselben Schlüsse, wie in § 167, dass die Resultante aller senkrecht auf bd drückenden parallelen Kräfte durch den Schwerpunct s des Trapezes $bdhk$, also auch, wenn $os \parallel dh$ ist, durch den Punct o geht. Zufolge § 139, Anmerkung ist nun aber

$$x = \frac{a}{3} \cdot \frac{a + 3c}{a + 2c}$$

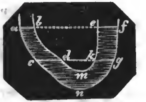
$$x = 1\tfrac{4}{5}'.$$

Setzt man die Entfernung der Drehachse oo vom Niveau mn, nämlich $no, = y$, so hat man $y = a + c - x$, oder:

$$y = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2 + 3ac + 3c^2}{a + 2c.}$$
$$y = 5\tfrac{1}{15}'.$$

Steigt das Wasser über das Niveau mn, so nimmt der Druck auf den obern grössern Theil ao der Klappe mehr zu, als auf den untern Theil und die Klappe öffnet sich so lange, bis das Wasser wieder zum Niveau mn gefallen ist.

170.

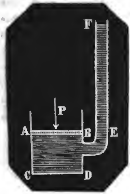


Lehrsatz. In communicirenden Gefässen (Röhren) sind die freien Oberflächen ab, ef des Wassers immer in einerlei Niveau (Horizont) af.

Beweis 1. Man denke sich in einerlei Horizont zwei Scheidungsflächen, z. B. $cd = 1 \square'$ und $kg = 2 \square'$. Die Höhe des Wasserspiegels über cd betrage z. B. 3', alsdann ist der Druck auf cd gleich 3 . 66 = 198 ℔. (§ 166). Da dieser Druck sich gleichmässig fortpflanzt und auf jeden Quadratfuss der Schicht kg von unten nach oben derselbe ist, so ist klar, dass für den Zustand des Gleichgewichts das Wasser über der Schicht kg ebenfalls 3' hoch stehen muss, wobei offenbar das unterhalb cg befindliche Wasser gar nicht in Betracht kommt und auch die Form der Seitenwände gleichgültig ist. Auch gilt der Satz nicht bloss für zwei, sondern für beliebig viele communicirende Gefässe.

Beweis 2. Man denke sich an einer andern Stelle, z. B. bei m eine einzige Scheidungsfläche mn. Soll Gleichgewicht Statt finden, so müssen die entgegengesetzten normalen Drücke auf die Scheidungsfläche gleich gross und folglich nach § 116 die Wasserspiegel in den verbundenen Gefässen gleich weit vom Schwerpuncte der Scheidungsfläche entfernt sein.

171.



Aufgabe. In einem cylindrischen Wasserbehälter befindet sich ein wasserdicht beweglicher Kolben AB, dessen Radius $r = 3'$ ist. Wie gross muss die darauf drückende Kraft P sein, um das Wasser in dem mit dem Gefässe communicirenden Rohr $h = 100'$ hoch über dem Niveau AB zu halten?

Auflösung. Unter dem Niveau AE ist das Wasser für sich im Gleichgewicht. Da nun, nach vorhergehendem Satz, die Wassersäule EF einer eben so hohen Wassersäule im andern Schenkel das Gleichgewicht hält, so muss auch (von der Reibung abstrahirt) die fragliche Kraft P gleich dem Gewichte dieser letztern Säule sein. Daher:

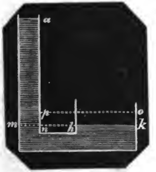
$$P = r^2 \pi h \gamma$$

$$P = 186685\tfrac{5}{7} \text{ ℔}$$

Die Weite und Form des Rohrs EF kommt hiebei also gar nicht in Betracht.

172.

Aufgabe. Zwei verbundene prismatische Gefässe sind bis mk mit Wasser gefüllt. Ueber einer horizontalen Klappe mn steht das Wasser noch $an = h = 8'$ hoch. Die Querschnitte beider Gefässe sind beziehlich: $f = 6 \square'$ und $F = 10 \square'$. Wie hoch wird nach dem Oeffnen der Klappe das Wasser über das Niveau hk steigen?



Auflösung. Setzt man die fragliche Höhe $ko = x$ und bedenkt, dass das über mn befindliche Quantum Wasser sich in zwei prismatischen Gefässen mp, ho von gleicher Höhe (x) vertheilen muss, so hat man $(F+f)\,x = hf$, woraus:

$$x = \frac{hf}{F+f}$$

$$x = 3'.$$

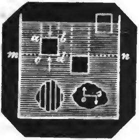
173.

Befinden sich in zwei verbundenen Gefässen zwei sich nicht mischende Flüssigkeiten von verschiedenem specifischen Gewicht, so verhalten sich die Höhen der Flüssigkeiten über dem Niveau der Scheidungsfläche umgekehrt, wie die specifischen Gewichte. Wäre z. B. (s. Fig. § 172) mn die Trennungsfläche zwischen Quecksilber und Wasser, und stände das Quecksilber über dem Niveau mk um $ko = 1$ Fuss hoch, so muss für den Zustand des Gleichgewichts das Wasser in dem andern Gefäss um $na = 13{,}6$ Fuss hoch stehen.

Zwölftes Buch.

Vom Auftriebe und Schwimmen der Körper.

174.



Lehrsatz. Jeder in eine Flüssigkeit untergetauchte Körper verliert so viel von seinem Gewichte, als die verdrängte Flüssigkeit wiegt.*)

Beweis. Sei, um ein bestimmtes Beispiel zu haben, der untergetauchte Körper ein Cubikfuss mit zwei horizontalen Flächen *ab*, *cd*.

Befindet sich die obere Fläche *ab* ein Fuss tief unter dem Niveau des Wassers, so erleidet sie von der darüber stehenden Wassersäule einen verticalen Druck, von oben nach unten, von 66 ℔, die untere Fläche *cd* dagegen (wegen der in der horizontalen Schicht *mn* überall gleichen Spannung) einen verticalen Druck, von unten nach oben, von 2 . 66 ℔. Die vier verticalen Seitenflächen haben (nach § 166) jede einen horizontalen Druck von 1½ . 66 ℔ auszuhalten.

Befindet sich die obere horizontale Fläche *ab* zwei Fuss tief unter dem Niveau, so hat sie offenbar einen verticalen Druck von 2 . 66 ℔, die untere dagegen in entgegengesetzter Richtung einen Druck von 3 . 66 ℔ und jede der verticalen Flächen einen horizontalen Druck von 2½ . 66 ℔ auszuhalten.

*) Dieser zuerst von **Archimedes** aufgestellte Satz giebt den Physik leichte Mittel an die Hand, die specifischen Gewichte der fester und tropfbar flüssigen Körper zu bestimmen.

Befände sich die horizontale obere Fläche (ein Quadratfuss) tausend Fuss tief unter dem Niveau, so wäre der verticale Druck von oben nach unten = 66000 ℔ und von unten nach oben = 66066 ℔, und der horizontale Druck auf die Seitenwände = 66033 ℔.

Man sieht hieraus, dass der Druck auf die Oberfläche eines untergetauchten Körpers mit der Tiefe wächst und wie beim telegraphischen Kabel sehr bedeutend werden kann, dass aber, wie der Lehrsatz behauptet, der Gewichtsverlust des untergetauchten Körpers, nämlich das Uebergewicht des grössern verticalen, von unten nach oben wirkenden Drucks der Flüssigkeit, der sogenannte Auftrieb, an jeder Stelle immer gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit ist.

Was hier von einem Körper, der die Form eines Cubikfusses hat, gesagt worden, gilt offenbar auch von jedem andern prismatischen Körper mit horizontalen Grundflächen, und mithin auch von jedem beliebig gestalteten Körper, indem man sich denselben in an einander liegende Prismen von unendlich kleinen horizontalen Grundflächen getheilt denken kann.

175.

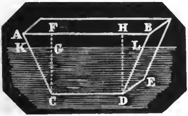
Ist der untergetauchte Körper von gleichmässiger Dichtigkeit, so fällt offenbar sein Schwerpunct mit dem Schwerpunct der verdrängten Flüssigkeit zusammen. Hat der Körper ausserdem dieselbe Dichtigkeit, mithin auch dasselbe Gewicht, wie die verdrängte Flüssigkeit, so muss er offenbar in jeder Tiefe und in jeder Lage um diesen gemeinsamen Schwerpunct im indifferenten Gleichgewicht sein, weil die horizontalen und entgegengesetzten Drücke sich aufheben, gerade wie bei den Seitenwänden eines Gefässes (vergl. § 162).

Fällt der Schwerpunct des untergetauchten Körpers nicht mit dem Schwerpunct der verdrängten Flüssigkeit zusammen, so kann, wenn der Körper auch dasselbe Gewicht, wie die verdrängte Flüssigkeit hat, doch nur dann Gleichgewicht Statt finden, wenn beide Schwerpuncte in einerlei verticaler Linie liegen. Liegt dann der Schwerpunct des Körpers oberhalb, so ist der Körper, wenn ganz untergetaucht, labil. Die geringste Erschütterung würde den Körper nöthigen, sich so lange zu drehen, bis sein Schwerpunct S vertical unter dem Schwerpunct O der verdrängten Flüssigkeit und damit in stabilem Gleichgewicht wäre, ohne dabei weder zu sinken, noch zu steigen (§ 35).

Wiegt der Körper mehr als die verdrängte Flüssigkeit, so sinkt er und zwar ist die Kraft, die ihn dazu nöthigt, immer gleich dem Unterschied seines absoluten Gewichts P und dem der verdrängten Flüssigkeit (dem Auftrieb) Q, also $= P - Q$. Wegen der gleichmässigen Fortpflanzung des stärkern verticalen Drucks nach unten wird beim Sinken des Körpers die Flüssigkeit unten und oben in entgegengesetzter Richtung zur Seite gedrängt.

Wiegt der Körper weniger, als die verdrängte Flüssigkeit, so steigt er mit einer Kraft gleich der verdrängten Flüssigkeit (Auftrieb), weniger dem absoluten Gewicht des Körpers und zwar so weit über das Niveau der Flüssigkeit empor, bis diese Steigkraft $= 0$ wird, d. h. der Körper nur noch so tief einsinkt, dass sein Gewicht dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit gleich ist, wobei dann beide Schwerpuncte in einerlei verticaler Linie liegen. Bestände der Körper aus einem Holze, dessen specifisches Gewicht $= \frac{1}{2}$, so würde er im Wasser schwimmen und mit seinem halben Volumen über die Oberfläche hervorragen, im Salzwasser noch mehr. Ebenso würde ein massives Stück Eisen im Quecksilber, dessen specifisches Gewicht beinahe mal so gross ist, schwimmen und fast nur die Hälfte seines Volumens eingetaucht sein. Kurzum, das Gewicht eines schwimmenden Körpers, er möge massiv oder hohl sein, ist immer gleich dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit. Kann man also den Cubikinhalt des Wassers bestimmen, welches durch ein Schiff verdrängt wird, so kennt man das Gewicht des verdrängten Wassers und folglich auch das Gewicht des Schiffes.

176.



Aufgabe. Es sei der horizontale Boden einer Fähre (eines Pontons) ein Rechteck, dessen Länge $CD = 20'$, Breite $DE = 10'$. Zwei Seitenwände seien verticale Trapeze und die vordere und hintere Anlage $AF = BH = 4'$, die Höhe $CF = 6'$ und das ganze Gewicht des Fahrzeugs sei $= 10000$ ℔. Welche Last wird es laden können, wenn es nur 4 Fuss tief gehen soll?

Auflösung. Der verdrängte Wasserkörper ist offenbar ein Prisma, dessen Höhe = D E und dessen eine parallele Grundfläche das verticale Trapez C K L D ist. Zur Bestimmung dieser Grundfläche hat man:

$$CG : CF = KG : AF$$
$$4 : 6 = KG : 4$$
$$KG = 2\tfrac{2}{3}'.$$

Es ist mithin $KL = 25\tfrac{1}{3}'$ und die Grundfläche $CKLD = \frac{25\frac{1}{3} + 20}{2} \cdot 4 = 90\tfrac{2}{3}\ \square'$. Das Gewicht (Auftrieb) des zu verdrängenden Wasserkörpers ist folglich $= 90\tfrac{2}{3} \cdot 10.66 = 59840$ ℔ und man kann also, um zwei Fuss Bord zu behalten, das Fahrzeug noch mit $59840 - 10000 = 49840$ ℔ belasten.*)

Anmerkung. Hat man zu beiden Seiten eines eingerammten Pfahls ein solches Ponton gelegt und lässt durch eine im Boden befindliche Klappe das Wasser in beide bis K L eindringen, befestigt den Pfahl an einem quer über die beiden Pontons gelegten Balken, und schöpft nun das Wasser wieder aus, so erlangen sie dadurch eine Tragkraft von 99680 ℔., mit welcher sie den Pfahl auszuziehen bestrebt sind. Mittelst eigends dazu construirter, an beiden Seiten gelegter Pontons (Kamele) werden zu tief gehende Schiffe über Untiefen fortgeführt.

177.

Aufgabe. Welche Kraft P' ist erforderlich, um einen massiven Körper, dessen absolutes Gewicht P = 600 ℔ und dessen Volumen V = 4 Cubikfuss, unterm Wasser im Gleichgewicht zu erhalten?

Auflösung. Da der Körper 4 Φ' Wasser verdrängt, so ist der Antrieb $V\gamma = 264$ ℔., mithin die zum Gleichgewicht erforderliche Kraft:

$$P' = P - V\gamma$$
$$P' = 336 \text{ ℔.}$$

---

*) Solche Art Aufgaben: über Gewicht, Belastung und Tragfähigkeit der Schiffe findet man in Lehrbüchern über Schiffsbaukunst.

178.

Aufgabe. Ein unregelmässiger massiver Körper wiegt $P = 200$ ℔., im Wasser gewogen aber nur $P' = 68$ ℔. Wie gross ist das Volumen V des Körpers?

Auflösung. Da der Auftrieb (Gewichtsverlust) des Körpers $= P - P' = 132$ ℔. = dem Gewichte des verdrängten Wassers ist und $\gamma = 66$ ℔. Wasser einen Cubikfuss Raum einnimmt, so hat man, wie auch aus der Formel § 177 folgt:

$$V = \frac{P - P'}{\gamma}$$

$$V = 2 \text{ □'}.$$

179.

Aufgabe. Ein Körper, dichter als Wasser, wiegt $P = 60$ ℔., unterm Wasser aber nur $P' = 40$ ℔. Wie gross ist das specifische Gewicht s des Körpers?

Auflösung. Das verdrängte Wasser hat dasselbe Volumen wie der Körper und wiegt $P - P' = 20$ ℔. So viel mal also das Gewicht des Körpers grösser ist, als das des verdrängten Wassers, so viel mal ist seine Masse, also auch sein specifisches Gewicht grösser, als das des Wassers, welches wir zur Einheit nehmen. Daher:

$$s = \frac{P}{P - P'}$$

$$s = 3.$$

180.

Aus vorstehender Formel folgt:

$$P - P' = \frac{P}{s}$$

d. h. der Auftrieb, den ein ganz untergetauchter massiver Körper erleidet, ist gleich seinem absoluten Gewichte, dividirt durch sein specifisches Gewicht.

Dieser Satz leuchtet auch unmittelbar ein und gilt für alle Körper, sie mögen dichter oder weniger dicht, als Wasser sein, weil der Auftrieb immer gleich dem Gewichte des verdrängten Wassers ist, und dieses mit ganz untergetauchten Körpern einerlei Volumen hat. Wäre z. B. das specifische Gewicht einer Sorte Eisen = 7 und von einer Sorte Tannen-

holz $= \frac{1}{2}$, so würde ein Cubikfuss Eisen einen Auftrieb $= \frac{7 \cdot 66}{7} = 66$ und ein Cubikfuss Tannenholz einen Auftrieb von $\frac{\frac{1}{2} \cdot 66}{\frac{1}{2}} = 66$ ℔. haben. Ein Stück Tannenholz von 3300 ℔. erleidet also **ganz** untergetaucht einen Auftrieb $= \frac{3300}{0,5} = 6600$ ℔.

181.

Aufgabe. Wie viel ℔. Kork, dessen specifisches Gewicht $s' = 0,24$, muss man mit $P = 1400$ ℔. gegossenem Eisen, dessen specifisches Gewicht $s = 7,21$, verbinden, damit beide verbundene Körper mit dem Wasser im Gleichgewicht sind?

Auflösung. Da die Summe der Auftriebe, nämlich das Gewicht des verdrängten Wasserkörpers, gleich dem Gewicht der verbundenen Körper sein muss, so hat man, das gesuchte Gewicht des Korks $= x$ gesetzt: $\frac{x}{s'} + \frac{P}{s} = P + x$ und hieraus:

$$x = \frac{s'}{s} \cdot \frac{s-1}{1-s'} \cdot P$$

$$x = 380,786 \text{ ℔.}$$

Nähme man etwas mehr Kork, so würden beide verbundene Körper etwas über die Oberfläche des Wassers hervorragen, also schwimmen.

182.

Aufgabe. Ein Cylinder von geschmiedetem Eisen, dessen Radius $r = 6''$, dessen Höhe $h = 3'$ und dessen specifisches Gewicht $s = 7,79$ ist, soll mit einem Korkringe umgeben werden, dessen Höhe $h' = 1'$ ist. Wie gross muss sein grösster Radius x sein, wenn das specifische Gewicht des Korks $s' = 0,24$ und beide verbundene Körper mit dem Wasser im Gleichgewicht sein sollen?

Auflösung. Das Volumen des eisernen Cylinders ist $= hr^2\pi$ und folglich sein Gewicht $= hr^2\pi s\gamma$ (wo $\gamma = 66$ ℔.). Das Volumen des Korkringes ist $(x^2 - r^2)\pi h'$ und sein Gewicht $= (x^2 - r^2)\pi h' s' \gamma$, daher:

$$\frac{(x^2-r^2)\pi h' s' \gamma}{s'} + \frac{h r^2 \pi s \gamma}{s} = h r^2 \pi s \gamma + (x^2 - r^2)\pi h' s' \gamma$$

$$(x^2-r^2)h' + h r^2 = h r^2 s + (x^2-r^2) h' s'$$

$$x = r \cdot \sqrt{\left(\frac{s-1}{1-s'} \cdot \frac{h}{h'} + 1\right)}$$

$$x = 2{,}63'.$$

183.

Aufgabe. Aus P = 6 ℔. Eisen, dessen specifisches Gewicht $s = 7{,}21$, soll eine Hohlkugel geformt werden, welche just zur Hälfte im Wasser untersinkt. Wie gross müssen die Radien R, r der äussern und innern Flächen sein?

Auflösung. Das Volumen des verdrängten Wassers ist $= \frac{2}{3} R^3 \pi$ und dessen Gewicht (Auftrieb) $= \frac{2}{3} R^3 \pi \gamma$. Das Gewicht der Hohlkugel ist $= \frac{4}{3}(R^3 - r^3)\pi s \gamma$. Beide Gewichte müssen einander gleich und = P sein, daher:

$$\tfrac{2}{3} R^3 \pi \gamma = P \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\tfrac{4}{3}(R^3 - r^3)\pi s \gamma = P \ldots\ldots\ldots (2)$$

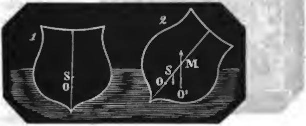
$$R = \sqrt[3]{\frac{3P}{2\pi\gamma}}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3(2s-1)P}{4\pi s \gamma}}$$

$$R = 0'{,}351 \ldots \text{ und } r = 0'{,}343 \ldots$$

184.

Metacentrum. Wir haben § 175 gesehen, dass ein untergetauchter Körper, hinsichtlich einer Drehung im stabilen oder labilen Gleichgewicht ist, je nachdem sein Schwerpunct S vertical unter oder über dem Schwerpunct O der verdrängten



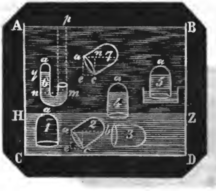
Flüssigkeit liegt. Ist der Körper aber nur zum Theil in die Flüssigkeit eingetaucht, also schwimmend, und sein Schwer-

punct S oberhalb O, so ist er in dem Falle dennoch stabil, d. h. er kommt durch einen Stoss in die Lage (2) gebracht (nach einigen Schwingungen) von selbst wieder in die Lage (1), wenn die durch den jetzigen Schwerpunct O' der verdrängten Flüssigkeit gedachte Verticale, die erste Linie OS oberhalb des Schwerpuncts S des Körpers in einem Punct M trifft, welchen Bouguer, in seinem „traité du navire," das Metacentrum nennt (meta, jenseits).

In diesem Fall wirken, weil immer das Gewicht eines schwimmenden Körpers dem Gewichte des verdrängten Wasserkörpers gleich ist, in O' und S oder auch § 16, in M und S, in verschiedenen Angriffspuncten zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte, welche den Körper drehen, bis der Schwerpunct des verdrängten Wassers O' wieder vertical unter S kommt. Fällt das Metacentrum M aber tiefer als der Schwerpunct S, so muss der Körper offenbar umstürzen.

185.

Aufgabe. Ein Gefäss AD sei bis zum Niveau HZ mit Quecksilber und darüber bis AB mit Wasser gefüllt. Ein unter dem Niveau AB mit Wasser gefülltes z. B. cylindrisches Gefäss werde, mit der horizontalen Oeffnung voran, unter das Niveau des Quecksilbers geführt. Man fragt nun, was für Erscheinungen eintreten müssen, wenn das cylindrische Gefäss aus der Lage (1) nach und nach in die Lagen (2), (3), (4) kommt?



Antwort 1. In der verticalen Lage (1) bleibt alles Wasser in dem Gefäss, weil der verticale auf allen Puncten der horizontalen Mündung gleiche Druck von unten nach oben stärker ist, als der entgegengesetzte von oben nach unten. Würde beim höchsten Punct a eine Oeffnung gemacht, so würde alles Wasser nach oben hinausgedrängt werden und Quecksilber dessen Raum einnehmen.

2. In der schrägen Lage (2) kann nicht alles Wasser im Gefässe bleiben, weil der normale Druck auf die nicht horizontale Mündung für einen tiefer liegenden Punct *c* um das Gewicht eines Quecksilberfadens *ae* weniger dem Gewicht eines gleich langen Wasserfadens stärker ist, als auf den Punct *a*. Ein Theil (*abc*) des sich gleichsam im Gefässe drehenden Wassers wird an der höhern Stelle *a* hinausgedrückt und sich zertheilend durch den Auftrieb des Quecksilbers über dessen Niveau HZ getrieben, bis die Scheidungsfläche *ab* horizontal ist.

3. Für die Lage (3) gilt ganz dasselbe Raisonnement, wie für die Lage (2). Alles Wasser wird hinausgedrängt und Quecksilber tritt an dessen Stelle.

4. Wird das jetzt (in der Lage 3) mit Quecksilber gefüllte Gefäss in die Lage (4) gebracht, so dass kein Theil der Mündung des Gefässes über dem Niveau des Quecksilbers hervorragt, so müsste das Quecksilber im Gefäss bloss durch den Druck des Wassers auf einer Höhe über dem Niveau HZ erhalten werden, die sich zu der Höhe des Niveaus AB verhält wie 1 : 13,6, weil das Quecksilber ja 13,6 mal schwerer ist, als Wasser. *)

Stände z. B. das Wasser über dem Niveau des Quecksilbers 13,6 Fuss hoch, so würde der alleinige Druck des Wassers das Quecksilber im Gefäss (4) 1 Fuss hoch erhalten. Wäre das Gefäss kürzer als 1 Fuss, so würde das Quecksilber auf das Gefäss bei *a* drücken. Würde aber bei *a* eine Oeffnung gemacht, so würde dann auch der durch die feste Wand nicht mehr abgesperrte Druck des Wassers alles Quecksilber heraustreiben. Wäre dagegen das mit Quecksilber gefüllte und in die Lage (4) gebrachte Gefäss länger als 1 Fuss, so würde das Quecksilber unter dem alleinigen Druck des Wassers bis auf 1 Fuss Höhe herabsinken und über dem Quecksilber im Gefäss ein ganz leerer Raum bleiben.

Könnte man eine vollkommen horizontale Scheidungsfläche herstellen (etwa durch Vorlegung eines Blattes Papier (5)), so müssten alle diese Erscheinungen noch Statt finden, wenn sich das Gefäss mit Quecksilber auch ganz im Wasser befände, so dass also in theoretischer Hinsicht eine schwerere

---

*) Wir werden später sehen, dass durch den Druck, den ein unsichtbarer Körper auf die Oberfläche AB des Wassers ausübt, das Quecksilber noch 28 Zoll höher stehen muss.

Flüssigkeit über einer leichtern im Gleichgewicht gedacht werden kann. Die geringste Erschütterung würde aber die Scheidungsfläche in eine schräge Lage bringen, z. B. (7) und dann kommt alles Quecksilber, sich zertheilend, an der tiefern Stelle aus dem Gefäss heraus, und an der höhern hineindringend tritt das Wasser an dessen Stelle, und zwar aus folgenden Gründen: Der nach einwärts gerichtete normale Druck bei c ist um das Gewicht des Quecksilberfadens nc, weniger dem Gewicht eines gleich langen Wasserfadens ae schwächer, als bei a und das Quecksilber wird gleichsam herausgedreht.*)

Steht endlich, um eine horizontale Fläche zu erhalten, das mit Quecksilber gefüllte Gefäss in einem anderen oben offenen Gefäss mit Quecksilber (5) oder hat das mit Quecksilber gefüllte Gefäss einen geschlossenen und einen offenen Schenkel (6), so würde schon das blosse Gewicht der Wassersäule pm das Quecksilber auf einer solchen Höhe nq erhalten, dass $nq : pm = 1 : 13{,}6$. Macht man jetzt bei a eine Oeffnung, so würde das Quecksilber in beiden Schenkeln (6) oder in beiden Gefässen (5) in gleiches Niveau kommen

*) Dass das Quecksilber sich zertheilt, kommt daher, weil tiefer liegende Theilchen stärker als höher liegende gedrückt und deshalb wegen der geringen Cohäsion von einander getrennt werden.

III. Theil:

Aërostatik.

Dreizehntes Buch.

Vom Drucke der Luft.

186.

Die festen und tropfbar flüssigen Körper sind so auffallende Naturerscheinungen, dass jeder Mensch, ohne darauf aufmerksam gemacht zu sein, sie von selber wahrnimmt. Wie Manches mag aber in der uns umgebenden Natur existiren, welches, wenn es uns auch noch so nahe gerückt würde, dennoch nicht von uns sinnlich wahrgenommen werden könnte und dessen wirkliche Existenz wir jedenfalls nur durch Vernunftschlüsse, gestützt auf den Satz: „keine Wirkung ohne Ursache", beweisen könnten. So können wir z. B. die gegenseitige Anziehungskraft der Körper sinnlich nicht wahrnehmen, dass sie aber wirklich existirt, schliessen wir aus ihren Wirkungen, indem unser Verstand das Factum nicht läugnen kann, dass alle Körper sich gegenseitig anziehen.

Gleichnissweise verhält es sich so mit einem die Erde umgebenden unsichtbaren Körper, welchen wir **Luft** nennen, und zu dessen Betrachtung wir jetzt übergehen.

187.

Weil die Existenz dieses Körpers unmittelbar durch keinen unserer Sinne wahrnehmbar ist, so ist es auch nicht leicht, den gemeinen Mann davon zu überzeugen. Wer würde wohl sogleich zugeben und glauben, dass ein sogenanntes leeres Zimmer, in welchem wir uns nach allen Richtungen hin ganz frei bewegen können, dennoch mit einem unsichtbaren Körper erfüllt ist, der sehr mannichfaltige und merkwürdige Eigenschaften besitzt und unter Umständen eine gewaltige Kraft äussern kann, und dass, wenn das Zimmer z. B. 20 Fuss lang, breit und hoch wäre, und man den darin befindlichen unsichtbaren Körper in einen Sack thun könnte, man über 500 ℔ an ihm zu tragen hätte.

Das Wort Luft mag wohl so alt sein, als die Sprache, und die wenn auch nur ganz rohe und confuse Vorstellung von einer überall existirenden Luft hat man sicher schon sehr frühe gehabt; die Erscheinung des Windes konnte darauf führen. Allein eine confuse, höchst unklare Vorstellung ist noch weit entfernt von einer deutlichen und bestimmten. Selbst der so weise Salomon wusste doch noch nicht, ob der Wind etwas Materielles oder Immaterielles sei, ob ein Körper oder ein Geist ihn anwehte und wie der Wind entsteht.

188.

Erst etwa 300 Jahre vor unserer Zeitrechnung, so scheint es, haben die griechischen Philosophen, und unter ihnen namentlich Aristoteles, es sich angelegen sein lassen, das Wesen der Luft näher kennen zu lernen, und obgleich ihre Forschungen von keinem Erfolg und ihre aufgestellten Ansichten den Fortschritten der Naturwissenschaften sehr nachtheilig gewesen sind, so ist es doch gut, dieselben kennen zu lernen, einmal um zu sehen, wie der menschliche Geist auf falsche Fährte gerathen, bei fix gewordenen Vorstellungen sie nicht wieder verlassen kann, dann auch, um klar einzusehen, dass in den Wissenschaften keine Autoritäten geduldet werden dürfen.

189.

Zuerst wird von Aristoteles der Satz aufgestellt: „Es giebt keinen Ort in der ganzen Welt, der absolut leer wäre.

Materie befindet sich allenthalben, und wo sie nicht als fester oder tropfbar flüssiger Körper in die Augen fällt, da ist sie in der unsichtbaren Form vorhanden, welche wir Luft nennen."

Offenbar ist dies eine ganz unbegründete Hypothese. Warum sollte es nicht im unendlichen Raume auch leere, wenigstens luftleere Räume geben können?

„Weil, heisst es weiter, weil die Natur einen Abscheu gegen leere Räume hat."

Offenbar wieder ein Schluss ohne Prämissen, wie Seethiere ohne See.

Diese Aristotelische Theorie, die sich zwei tausend Jahre hindurch als die einzig richtige erhalten hat, wurde indess mit um so grössern Beifall aufgenommen, als man sie durch Experimente, mithin durch scheinbar unumstössliche Erfahrungsbeweise*) unterstützte und namentlich durch sie die bis dahin unbegreifliche Erscheinung des Saugens bündigst zu erklären glaubte. Wird nämlich der Kolben eines Cylinders (Spritze), dessen unteres offenes Ende in eine Flüssigkeit getaucht ist, empor gezogen, „so treibt, damit kein leerer Raum entsteht, der Abscheu die Flüssigkeit in den Cylinder hinein."

190.

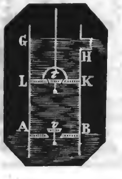
Diese alte Theorie, vom Abscheu der Natur gegen den leeren Raum,**) wurde, wie gesagt, nicht allein als eine sehr

---

*) Der unbefangene Verstand wird auf Erfahrungen, und wenn auch noch so viele Menschen ganz dieselbe Erfahrung machen, doch nur dann erst etwas geben, wenn er dadurch den Zusammenhang von Ursache und Wirkung kennen lernt. Alle geschickten, aber nicht wissenschaftlich gebildeten Schwimmer behaupten, ihre eigenen Erfahrungen vorschützend, steif und fest: je tiefer das Wasser, je leichter das Schwimmen, und doch ist dies ein auf Selbsttäuschung beruhender grosser Irrthum (§ 174).

**) Wir hielten eine kurze Mittheilung dieser alten Lehre für nützlich, weil sie in der Geschichte des menschlichen Geistes sehr lehrreich ist, dann auch, damit knappsinnige Leser sich nicht durch Scheingründe zu falschen Vorstellungen verführen lassen, was unter andern durch das in wiederholter Auflage erschienene Drieberg'sche Machwerk geschehen könnte, worin derselbe, wie jener schmutzige Mensch, wirklich Umkehr der Wissenschaft verlangt. Dass so viele in der Physik unterrichtete Personen oftmals sehr mangelhafte Vorstellungen von der Aërostatik haben, rührt einzig von der fehlerhaften Methode her, nach welcher die-

wichtige Entdeckung aufgenommen und für eine unumstössliche Wahrheit gehalten, sondern auch alsbald für das praktische Leben ausgebeutet. Ein Mechaniker Ctesibius zu Alexandrien, 150 v. C., wurde nämlich dadurch auf die nützliche Erfindung der Pumpen zum Wasserheben geführt, wobei er folgenderweise verfuhr:



Er tauchte das untere, mit einem sich nach innen öffnenden Ventil versehene Ende eines Cylinders in das zu hebende Wasser. Wurde nun der anfangs unten bei AB befindliche und gleichfalls mit einem sich nach aussen öffnenden Ventil versehene Kolben LK in die Höhe gezogen, „so müsste ja ein leerer Raum unter dem Kolben entstehen, wenn die Natur nicht einen Abscheu dagegen hätte. Dieser Abscheu stösst also das Ventil *v* auf und treibt das Wasser bis unter den Kolben LK in den Cylinder hinein," worauf sich dann das Ventil *v*, weil specifisch schwerer als Wasser, von selbst wieder schliesst. Wird nun der Kolben bis AB wieder hinuntergedrückt, so öffnet sich jetzt das Ventil *t* und die ganze Wassersäule AK kommt über den Kolben, kann also gehoben werden und bei H abfliessen. Beim Aufziehen des Kolbens wird der unter ihm sonst entstehende leere Raum gleichzeitig durch den Abscheu wieder mit Wasser ausgefüllt, und das Kolbenspiel kann also von Neuem beginnen u. s. f.

191.

Als aber vor etwa zweihundert Jahren (1643) ein Gärtner in Florenz den Abscheu gegen den leeren Raum gar zu sehr in Anspruch nehmen und durch Hülfe desselben auf die eben

selbe gelehrt wird. Noch zu unsern Zeiten kam der Professor der Physik mit der Luftpumpe in den Hörsaal, liess die Kolben spielen, kehrte dann die Luftpumpe um und sagte: „Sehen Sie, m H., die Glocke sitzt jetzt fest, sehr fest, ganz fest! Das macht der Luftdruck oder die Schwere der Luft," und die Studenten freuten sich sehr. Ist das nicht fast dasselbe, als wenn man durch Vorzeigung und Gehenlassen einer Uhr Jemanden die Vorstellung der Zeit beibringen wollte? Ohne vorhergehende klare Vorstellungen vom Drucke der Luft konnte die Luftpumpe nicht erfunden, noch ihre Wirkungen eingesehen werden.

gezeigte Ctesibische Weise Wasser auf 40 Fuss Höhe heben wollte, bemerkte man die damals in Erstaunen setzende merkwürdige Erscheinung, dass das Wasser in der Pumpe nur 32 Fuss hoch stieg, mithin unterhalb des Kolbens ein leerer Raum von 8 Fuss Länge blieb, gegen welchen die Natur keinen Abscheu zeigte.

Diese für die Folge sehr wichtige Entdeckung wurde dem berühmten Galiläi mitgetheilt, der geantwortet haben soll: dies Factum beweise, dass der Abscheu nur 32 Fuss lang sei. Man weiss in der That nicht, ob Galiläi dies im Scherz oder im Ernst gesagt, und ob er die Luft für schwer oder nicht schwer gehalten hat. Denn allgemein herrschte damals noch der Glaube, dass nicht allein die unsichtbare Luft, sondern auch alles, was in ihr aufsteigt, wie Dünste, Rauch etc., kein Gewicht habe. Nur soviel wusste man damals von der Luft, dass sie sich bedeutend zusammendrücken lässt, und dass sie dadurch das Bestreben erhält, sich nach allen Richtungen hin wieder auszudehnen, und zwar mit um so mehr Kraft, je mehr sie zusammengedrückt war. Hat man z. B. einen metallenen Cylinder, dessen eines Ende verschlossen ist, und sucht nun einen wohl schliessenden Kolben hineinzudrücken, so wird dies immer schwerer, und den Kolben ganz bis an den Boden des Cylinders zu treiben, gelingt gar nicht. Die comprimirte Luft drückt den Kolben wieder zurück oder bläs't durch irgend eine im Cylinder gemachte Oeffnung mit grosser Gewalt, fühlbar und hörbar, hinaus und diese Beobachtung berechtigte wenigstens zu der Hypothese, dass die Luft ein Körper sei und nicht ein Geist, der sich zusammendrücken lässt und dann bläs't.

Diese Vorstellung von der Körperlichkeit der Luft aber reichte hin, Torricelli, einen scharfsinnigen Schüler Galiläi's, auf eine richtige Erklärung des in der Pumpe entstandenen leeren Raumes zu führen und dadurch eine ganz neue Wissenschaft, die Aërostatik, zu begründen, und man kann wohl sagen, dass erst bei diesem misslungenen Pumpenversuch, mithin erst vor etwa zweihundert Jahren, die Morgenröthe unserer jetzigen Naturwissenschaft anbrach. Hätte Aristoteles diese wichtige Entdeckung des in der Pumpe entstandenen leeren Raums gemacht und wie Torricelli raisonnirt, wir wären jetzt vielleicht schon so weit in den Naturwissenschaften, als unsere Nachkommen nach tausend Jahren sein werden.

192.

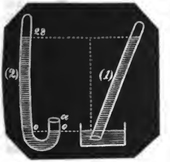
Wenn die Luft, schloss Torricelli, ein die Erde überall umgebender Körper ist, so wird sie doch auch wohl, wie jeder andere Körper (weil von der Erde angezogen, §§ 38, 39) Gewicht haben, d. h. auf eine horizontale Fläche einen Druck ausüben. Ist dies aber der Fall, so ist klar, dass der auf dem Niveau des die Pumpe umgebenden Wassers Statt findende Luftdruck es ist, welcher nach Aufziehung des Kolbens L K das Wasser in den enstandenen leeren Raum A K hineintreibt. Der besagte Luftdruck pflanzt sich ebenso, als wenn er durch einen die Pumpe umgebenden Kolben verursacht würde, durch die ganze Flüssigkeit fort, also auch vertical von unten nach oben auf das Ventil *v*, welches, weil nach Aufziehung des inneren Kolbens der Gegendruck fehlt, aufgestossen wird.

Hiemit wäre also eine bestimmte Kraft und deren Sitz nachgewiesen, welche das Saugen der Pumpe bewirkt. Denn auch die Grösse dieses Luftdrucks auf eine bestimmte Fläche ist nun bekannt. Wäre z. B. der ganz beliebige Querschnitt der gehobenen 32 Fuss hohen Wassersäule 1 Quadratfuss, so wäre offenbar der Druck der Luft auf diese Fläche von einem Quadratfuss $= 32 . 66 = 2112$ ℔., und auf einen Quadratzoll $= \frac{32 . 66}{144} = 15$ ℔. (nahe), und zwar findet dieser Luftdruck von 15 ℔. auf einen Quadratzoll nach allen Richtungen hin Statt, weil ja, wie wir gesehen, die Luft zusammendrückbar und mithin die untern Luftschichten, durch das Gewicht der darüber liegenden zusammengedrückt, das Bestreben haben, sich, wie elastische Körper, nach allen Richtungen hin auszudehnen.

193.

Wäre, schloss Torricelli weiter, die tropfbare Flüssigkeit, worin die Pumpe steht, specifisch leichter oder schwerer als Wasser, so würde auch die durch den Luftdruck in die Pumpe getriebene Flüssigkeitssäule höher oder niedriger als 32 Fuss gewesen sein, vom Niveau A B ab gerechnet. Die Höhen dieser verschiedenen Flüssigkeitssäulen würden sich genau wie umgekehrt ihre specifischen Dichtigkeiten verhalten. Stände z. B. die Pumpe statt im Wasser, im Quecksilber, so

würde dieses, weil es 13,6 mal schwerer ist, dem emporgezogenen Kolben auch nur bis auf eine Höhe von $\frac{32}{13,6} = 2\frac{6}{17}'$, oder nahe 28 Zoll über dem Niveau AB folgen.



Die Richtigkeit dieser Folgerungen liess sich durch ein leichtes Experiment bestätigen.

Man füllte ein gläsernes, an einem Ende verschlossenes und reichlich 30 Zoll langes Rohr ganz mit Quecksilber und tauchte dann das offene, mit dem Finger verschlossene Ende in ein Gefäss mit Quecksilber, zog den Finger unterm Quecksilber wieder weg und das Quecksilber blieb richtig 28″ hoch im Rohre stehen. Der über dem Quecksilber im Rohr entstandene leere Raum wurde Torricelli zu Ehren die Torricelli'sche Leere genannt.

Dass das offene Ende des mit Quecksilber gefüllten Rohrs in ein Gefäss mit Quecksilber getaucht wird, geschieht offenbar nur, um eine genaue horizontale Fläche zu erhalten. Könnte man dies auf andere Weise, etwa durch Vorlegung eines Stückes Papier, erreichen, so würde das Experiment auch in der Luft gelingen. Wäre die Grundfläche aber nicht horizontal, so würde die Luft aus dem § 185 angegebenen Grunde an der höhern Stelle in's Rohr dringen und das Quecksilber, sich zertheilend, herauslaufen. Ist aber das offene Ende des Rohrs umgebogen (Fig. 2), so bildet sich eine horizontale Fläche *o* von selber.

Die Form des mit Quecksilber gefüllten Rohrs ist hiebei offenbar ganz gleichgültig. Weil jedoch der Druck der Luft mit wechselnder Temperatur und Feuchtigkeit derselben sich ändert, und bald etwas mehr, bald etwas weniger als 28″ beträgt, so muss auch, wenn das Rohr als Barometer dienen soll, d. h. als Instrument, womit die Grösse des Luftdrucks jeden Augenblick beobachtet werden kann, dasselbe genau calibrirt sein, um auch die Ausdehnung des Quecksilbers und der am Rohr befindlichen messingenen Scale durch die Wärme mit in Rechnung ziehen zu können. Ausserdem muss auch die Scale beim Ablesen stets vertical sein, sowie auch die Stelle des Nullpuncts (0), der beim grössern Luftdruck ein

wenig tiefer liegt, jedesmal genau bestimmt werden. Am Meeresufer ist bei 0° Temperatur und unter 45° geogr. Breite der mittlere Barometerstand in Pariser Maass 28 Zoll = 336 Linien = 760 Millimeter.

194.

Obgleich Torricelli seine neue Lehre, dass die Luft Gewicht habe, und der Druck derselben auf jeden Quadratzoll im Mittel 15 ℔ betrage, durch die eben angeführten triftigen Gründe unterstützte, so wurden doch anfangs viele Einwendungen gegen ihre Richtigkeit erhoben, weil man sich von dem alten eingewurzelten Glauben, vom Abscheu der Natur gegen den leeren Raum, nicht befreien konnte. Wir wollen hier ein paar der hauptsächlichsten anführen:

Erster Einwand. „Wenn das Gewicht der über dem offenen Schenkel des Barometers (Fig. 2, § 193) stehenden Luftsäule es ist, welches das Quecksilber im andern, luftleeren Schenkel 28″ hoch erhält, woher kommt es dann, dass, wenn man den offenen Schenkel bei *a* mit dem Daumen verschliesst, und dadurch die darüber stehende Luftsäule absperrt, das Quecksilber im andern Schenkel dennoch unverändert 28″ hoch stehen bleibt? Dies kann doch nicht mehr von dem Gewichte der unter dem Daumen befindlichen kurzen Luftsäule *ao* herrühren, weil ein Theil doch nicht so stark drücken kann, als das Ganze."

Antwort. Die zwischen dem Daumen und dem Quecksilber befindliche Luftsäule *ao* war durch das Gewicht der abgesperrten Luftsäule comprimirt und drückt also, vermöge ihrer Eigenschaft, sich nach allen Richtungen auszudehnen, mit derselben Kraft auf das Quecksilber und auf den Daumen, und umgekehrt der Daumen auf die eingeschlossene Luft mit derselben Kraft, mit welcher die abgesperrte Luftsäule (ihr Gewicht) darauf drückte. Hebt man nun den Daumen ein wenig in die Höhe, so kommt der Druck der comprimirten Luft von der Seite und drückt sowohl vertical von unten nach oben auf den Daumen, als auch von oben nach unten auf das Quecksilber im offenen Schenkel. Verschliesst man diesen also mit dem Daumen, so ist es nicht das Gewicht der unter ihm befindlichen comprimirten kurzen Luftsäule, sondern die Ausdehnungskraft (Expansibilität) derselben, welche aber durch das Gewicht der abgesperrten Luft-

säule erzeugt war und demselben an Grösse gleich ist. Deshalb bleibt die Höhe der Quecksilbersäule dieselbe, ob man das offene Ende des Barometerrohrs verschliesst oder nicht.

Zweiter Einwand. „Wenn der Luftdruck auf einen Quadratzoll 15 ℔, mithin auf eine Fensterscheibe von einem Quadratfuss 2160 ℔, von aussen nach innen, beträgt, warum wird sie nicht eingedrückt? Ja, warum stürzt ein Gebäude nicht zusammen, da doch nach dieser Rechnung der Luftdruck auf das Dach und jede der Wände mehrere Millionen Pfund schwer ist?"

Antwort. Die Luft ist so fein, dass sie durch die kleinsten Poren hindurch dringt, wenn kein gleicher Gegendruck Statt findet. Wollte man Luft in einem Cylinder von dünnem Tannenholz comprimiren, so würde sich zeigen, dass sie durch die Poren entweicht. Es ist also klar, dass wegen der Fortpflanzung des Luftdrucks nach allen Richtungen und wegen der, wenn auch unmerklichen feinen Ritzen an Fenstern und Thüren, die Luft im Innern des Gebäudes dieselbe Expansivkraft wie aussen hat, und folglich ein gleicher Gegendruck Statt findet. Könnte man ein Zimmer luftleer machen, so würde es auch, wegen des einseitigen Drucks von aussen nach innen, alsbald zusammenstürzen.

Dritter Einwand. „Die Oberfläche eines erwachsenen Menschen beträgt etwa 15 Quadratfuss. Ein solcher hätte also den enormen Druck von mehr als 30000 ℔ auszuhalten. Wie ist das möglich?" „Welcher Unsinn, ihr weisen Physikbeflissenen!" ruft noch jetzt Herr Drieberg in seiner Anti-Torricelli'schen Lehre aus. „Und Fanny Elsler sollte unter einer Luftlast von 30000 ℔ auf ihrer grossen Zehe stehen können?!" Welche ungeheure Kraft müsste Fanny in ihrer grossen Zehe haben!

Antwort. Was die Grösse dieses Druckes von 30000 ℔ betrifft, so muss man bedenken, dass derselbe über den ganzen Körper gleichmässig vertheilt ist. Ja, spürte Herr Drieberg diesen Druck bloss von unten nach oben, er würde ohne Umkehr in die Luft emporschiessen, wie ein Pfropf im Wasser, und wegen der versprochenen zweitausend Ducaten für die ihm gewordene Widerlegung und Belehrung hätte man dann wirklich nur das Nachsehen.*)

*) Fr. von Drieberg hat nämlich auf die Widerlegung seiner neuen Anti-Torricelli'schen Lehre einen Preis von 2000 Ducaten gesetzt.

Wegen der gleichen Vertheilung des Drucks, er beträgt auf den Quadratzoll ja nur 15 ℔., auf die Quadratlinie gar nur 3 Loth, kann der menschliche Körper noch einen viel grössern Druck aushalten. Ein Taucher kann auf kurze Zeit recht gut 32 Fuss tief im Wasser untertauchen. In dieser Tiefe ist dann aber der Druck auf seinen Körper doppelt so gross. Das Wasser für sich allein drückt 32′ unterm Niveau mit 15 ℔. auf den Quadratzoll, hiezu den Luftdruck auf die Oberfläche des Wassers gerechnet, macht 30 ℔. auf den Quadratzoll.

Wir haben ihn damals im Hamburger „unpart." Correspondenten aufgefordert, entweder sein schädliches Machwerk aus dem Buchhandel herauszuziehen, oder erst die 2000 Ducaten bei der hiesigen preussischen Gesandtschaft zu deponiren. Dies ist nicht geschehen.

Vierzehntes Buch.

Beziehungen zwischen Dichtigkeit, Temperatur und Druck der Luft.

195.

Mariotte'sches Gesetz. Die schon erwähnte Eigenschaft der Luft, dass sie sich bedeutend zusammendrücken (verdichten) lässt, und dadurch eine grössere Ausdehnungskraft erlangt, führte Mariotte (1776) zu der Frage, welches Gesetz zwischen der Dichtigkeit und Ausdehnungskraft eines bestimmten Quantums Luft Statt findet, und er fand durch ein höchst einfaches Experiment, welches jedes Lehrbuch der Physik beschreibt, dass, bei derselben Temperatur, die Ausdehnungskraft der Luft genau ihrer Dichte proportional wächst. Hätte man z. B. in einem luftdichten Cylinder ein Quantum Luft von 0° Temperatur und drückt sie auf den Quadratzoll mit 15 ℔, so würde sie, etwa durch Hineindrücken eines Kolbens auf $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ... so grosses Volumen zusammengedrückt, offenbar 2, 3, 4 ... mal so dicht werden, und dann auf den Quadratzoll einen 2, 3, 4, ... mal so grossen Druck ausüben, also mit respective 30, 45, 60 ℔, ... drücken, oder wie es in der Kunstsprache heisst, mit 2, 3, 4, ... Atmosphären drücken. Dieses wichtige Gesetz hat man bis zu 27facher Verdichtung und 112facher Verdünnung bestätigt gefunden. Die Frage, wie weit dieses Gesetz Statt findet, wie weit sich überhaupt die Luft verdichten oder verdünnen lässt, muss ihre Beantwortung in spätern Zeiten finden.

196.

Indess war es doch dieser Gedanke, dass nämlich ein bestimmtes Quantum Luft, wenn es den dazu nöthigen leeren Raum fände, sich immerfort ausdehnen (verdünnen) werde, welcher Otto v. Guerike 1650, also schon vor Mariotte, auf die Erfindung der Luftpumpe führte, womit er mehre wichtige Entdeckungen in der Aërostatik machte und mehre, den Unkundigen in Staunen setzende Naturerscheinungen hervorrief, deren nothwendiges Eintreten er selbst aber als einfache Folgerungen aus der Torricelli'schen Leere voraussagen konnte. Wer das Vorhergehende gehörig verstanden hat und die Einrichtung einer Luftpumpe kennt, die sich in jedem Lehrbuch der Physik beschrieben findet, wird folgende Fragen leicht beantworten.

197.

Frage. Es sei der Radius des auf den Teller der Luftpumpe gesetzten Recipienten $r = 6''$. Mit welcher Kraft P wird derselbe an dem Teller haften, wenn man annimmt, er sei ganz luftleer gemacht?

Antwort. Durch ganz gleiche Schlüsse, wie in § 162, findet man:

$$P = r^2 \pi . 15$$
$$P = 1697 \text{ ℔}$$

Anmerkung 1. Die gewölbte Form giebt dem Recipienten mehr Festigkeit, weil hier alle Theile der Wölbung, wie die Steine eines gemauerten Bogens, nach einem und demselben Punct hingedrängt werden.



Anmerkung 2. Der Druck des Wassers, der Luft, des Dampfes, welcher einen beliebig geformten Deckel von einem Leitungsrohr oder Kessel abzuheben sucht, ist wegen der Fortpflanzung des Drucks nach allen Richtungen nicht grösser, als der Druck auf einen platten Deckel, der die Mündung ab verschlösse.

198.

Frage. Auf den Teller der Luftpumpe wird: 1) die luftdicht schliessende Mündung eines cylindrischen Glases und 2) ein fest verkorktes dünnes Medicinglas gesetzt, 3) eine schlaff zugebundene Blase gelegt, 4) in ein auf dem Teller stehendes Gefäss mit Wasser der Hals einer damit gefüllten Flasche gesteckt, der Pfropfen unterm Wasser weggezogen und über alles dieses der luftdicht schliessende Recipient gesetzt. Welche Erscheinungen müssen nun nothwendig eintreten, wenn 1) der Recipient möglichst luftleer gemacht wird und dann 2) die Luft wieder hineingelassen wird?

Antwort. 1) Wird der von aussen nach innen auf das dünne Medicinglas und auf die Blase Statt findende Druck von 15 ℔ auf den Quadratzoll durch Auspumpen der Luft weggenommen, so wird der ebenso grosse entgegengesetzte Druck der eingeschlossenen Luft, von innen nach aussen, die Blase ausdehnen und das dünne Glas sprengen, wenn es diesen Druck nicht aushalten kann. Das Wasser in der Flasche muss aus hydrostatischen Gründen mit dem Wasser im Gefässe in gleiches Niveau kommen. Die Luft in dem umgekehrten Glase hebt dasselbe und entweicht. Wird nun 2) der äussern Luft der Eintritt wieder gestattet, so legt sich die Blase wieder in Falten, das Wasser tritt wieder in die Flasche hinein, der vorhin fest am Teller haltende Recipient ist jetzt leicht abzuheben, das umgekehrte Glas dagegen sitzt am Teller fest.

199.

Aufgabe. Der Inhalt des Recipienten sammt des zum Stiefel führenden Rohrs sei $V = 100$ Cubikzoll, der Inhalt des Stiefels $v = 8$ Cubikzoll. Welche Dichtigkeit d_n wird nach $n = 50$ Kolbenspielen die Luft noch im Recipienten haben, wenn die anfängliche Dichtigkeit $= d$ ist, und von dem schädlichen Raum abstrahirt wird?

Auflösung. Da sich nach der ersten Aufziehung des Kolbens die in dem Raume V enthaltene Luft in dem Raume $V + v$ verbreitet, so muss, wenn wir ihre jetzige Dichtigkeit mit d_1 bezeichnen, $d_1 = \frac{V}{V+v} d$ sein. Ebenso hat man nach dem

zweiten Aufzuge des Kolbens $d_2 = \frac{V}{V+v} \cdot d_1 = \left(\frac{V}{V+v}\right)^2 d$ und nach dem n^{ten} Zuge:

$$d_n = \left(\frac{V}{V+v}\right)^n \cdot d$$
$$d_{50} = 0{,}02132\, d.$$

Entspräche der Dichtigkeit d ein Druck von 15 ℔ auf den Quadratzoll oder 336‴ Barometerstand, so würde sie nach dem Mariotte'schen Gesetz jetzt nur einen Druck von etwa 0,3 ℔ auf den Quadratzoll ausüben.

Hätte der Recipient in der Wölbung ein Loch, so dass er über ein auf dem Teller stehendes Barometerrohr geschoben werden könnte, und wäre dasselbe an dieser Stelle luftdicht umkittet, so müsste nach 50 Kolbenspielen das Quecksilber von 336‴ auf 6,7‴ gesunken sein. Die Abweichung der Rechnung von der Beobachtung giebt dann eine Vorstellung von der Güte der Luftpumpe und von der Wirkung des schädlichen Raums.

200.

Aufgabe. Wie dicht wird nach $n = 50$ Kolbenspielen die Luft im Recipienten einer Compressionspumpe sein, wenn der Inhalt des Recipienten $V = 100$ Cubikzoll und der des Stiefels $v = 8$ Cubikzoll ist.

Auflösung. So viel mal mehr Luft im Recipienten enthalten ist, so viel mal dichter ist sie. Weil nun mit jedem Kolbenzuge zu den im Recipienten enthaltenen V Cubikzoll Luft noch v Cubikzoll, also nach n Zügen nv Cubikzoll hinzukommen, so hat man für ihre jetzige Dichte

$$d_n = \frac{V + nv}{V} \cdot d.$$
$$d_{50} = 5 \,.\, d.$$

Sie würde also, wenn der anfänglichen Dichte d ein Atmosphärendruck von 15 ℔ auf den Quadratzoll entspricht, jetzt von innen nach aussen mit 5 Atmosphären, d. i. mit 75 ℔ darauf drücken.

201.

Gewicht der Luft. Mit Hülfe der Luftpumpe war es nun leicht, auch das Gewicht eines bestimmten in einem Hohlgefäss enthaltenen Quantums Luft zu finden. Durch wiederholte Wägungen hat man gefunden, dass, bei 0° und 28″ Barometerhöhe, ein Cubikfuss trockener Luft nahe $2\frac{4}{5}$ Loth oder $11\frac{1}{3}$ Cubikfuss nahe 1 ℔ wiegt, mithin die Luft in diesem Zustand nahe 770 mal leichter als Wasser ist. Bei 18° und 332‴ Barometerhöhe ist die mit Wasserdämpfen gesättigte Luft ungefähr 850 mal leichter als Wasser, und ein Cubikfuss dieser Luft wiegt dann nahe $2\frac{1}{2}$ Loth.

202.

Gay-Lussac'sches Gesetz. Durch sorgfältige Versuche hat zuerst Gay-Lussac gefunden, dass die Ausdehnung der Luft durch die Wärme der Temperatur fast ganz genau proportional wächst, und dass sie bei derselben Ausdehnungskraft für jeden Grad des Centesimalthermometers um 0,00366 ihres Volumens, welches sie bei 0° und 28″ Barometerhöhe hatte, mithin, wenn sie den nöthigen Raum findet und um 100° erwärmt wird, um 0,366, d. i. beinahe um den dritten Theil ihres Volumens, bei derselben Spannung, zunimmt.

Man denke sich z. B. in einem Cylinder mit einem luftdicht, jedoch ohne Reibung, beweglichen Kolben 3 Cubikfuss Luft von 0° enthalten. Ist nun der Druck auf beiden Seiten des Kolbens 15 ℔ auf den Quadratzoll, so wird nach Erwärmung der eingeschlossenen Luft um 100° C der Kolben soweit zurückgeschoben, dass die eingeschlossene Luft jetzt nahe 4 Cubikfuss Raum einnimmt, und dabei wieder die anfängliche Ausdehnungskraft von 15 ℔ auf den Quadratzoll hat.

Kann die um 100° C erwärmte Luft sich nicht in einem grössern Raum ausdehnen, so würde ihre Ausdehnungskraft, gerade als wenn sie um ein Drittel ihres Volumens verdichtet worden wäre, wachsen, in unserm Beispiel also beinahe $\frac{4}{3}$ mal so gross sein und $\frac{4}{3} \cdot 15 = 20$ ℔ auf den Quadratzoll betragen.

Dieses Gay-Lussac'sche Gesetz lässt sich mit dem Mariotteschen verbinden. Drängt man nämlich jene 4 Cubikfuss Luft von 100° C in einen Raum von 2 Cubikfuss zusammen, so

ist ihre Spannkraft mal so gross, mithin = 30 ℔ auf den Quadratzoll.

203.

Ist allgemein v_0 das Volumen Luft von 0° Temperatur und 28″ Barometerhöhe, und nimmt ihre Temperatur um t Centesimal-Grade zu, so hat man für das erforderliche Volumen v, bei welchem sie noch dieselbe Spannung von 28″ Barometerhöhe ausübt:

$$v = (1 + 0{,}00366 . t) v_0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Und für das Volumen v', wenn die Temperatur statt um t um t' Grade zunimmt, ebenso:

$$v' = (1 + 0{,}00366 . t') v_0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Durch Division beider Gleichungen wird v_0 eliminirt und man erhält die Beziehung zwischen v, v', t, t', so dass, wenn bei derselben Barometerhöhe von 28″ drei von diesen Grössen gegeben sind, die vierte gefunden werden kann, nämlich:

$$\frac{v'}{v} = \frac{1 + 0{,}00366 . t'}{1 + 0{,}00366 . t} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Soll die um t und t' Grade erwärmte Luft dasselbe Volumen v_0 behalten, so ist, wenn man ihre Expansivkraft bei o, t, t' Grade, respective mit p_0, p, p' bezeichnet, und wo letztere Grössen in Gewicht oder Barometerhöhe ausgedrückt sein können:

$$p = (1 + 0{,}00366 . t) p_0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$p' = (1 + 0{,}00366 . t') p_0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Hieraus erfolgt das Verhältniss der Expansivkräfte eines und desselben Quantums Luft bei verschiedenen Temperaturen, nämlich:

$$\frac{p'}{p} = \frac{1 + 0{,}00366 . t'}{1 + 0{,}00366 . t} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Ist das Gewicht eines Cubikfuss Luft von 0° Temperatur $= q_0$, so hat man für das Gewicht q eines Cubikfuss dieser um t Grad erwärmten Luft, bei derselben Expansivkraft:

$$q = \frac{q_0}{1 + 0{,}00366 . t} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Ist endlich v das Volumen eines Quantums Luft, bei der Temperatur t und der Expansivkraft p, so hat man für das Volumen v' bei t' Temperatur und der Expansivkraft $= p'$:

$$\frac{v'}{v} = \left(\frac{1 + 0{,}00366 . t'}{1 + 0{,}00366 . t}\right) \frac{p}{p'} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Da sich die Dichten d, d' (oder Gewichte q, q') dieser Luft umgekehrt wie die Volumen verhalten, so ist auch:

$$\frac{d'}{d} = \left(\frac{1 + 0{,}00366 . t}{1 + 0{,}00366 . t'}\right) . \frac{p'}{p} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Die Eigenschaft der Luft, durch Verdichtung und Erwärmung grössere Druckkraft zu erlangen, führt leicht auf den Gedanken, dieselbe, gleich dem Dampfe, als bewegende Kraft zu benutzen. Zur Erreichung dieses Zweckes lässt sich aber keine Vorschrift geben, jedenfalls keine andere, als welche man Knaben giebt, um Sperlinge zu fangen. Ausser noch grösseres Genie und mehre Versuche, als dieserhalb bereits aufgewandt worden, wird wohl noch viel Zeit zur völligen Reife dieses Gedankens erforderlich sein.

204.

Auftrieb der Luft. Wegen des Gewichts der Luft und Fortpflanzung des Drucks nach allen Richtungen muss der verticale Druck, den ein Körper in der Luft von unten nach oben erleidet, offenbar grösser sein, als der von oben nach unten, und folglich der Körper, ebenso wie in einer tropfbaren Flüssigkeit, einen Auftrieb (Gewichtsverlust) erleiden, welcher dem Gewichte der verdrängten Luft gleich ist. So würde z. B. ein Körper, dessen Volumen = 1 Cubikfuss, in der Luft von 18° C und 332''' Barometerhöhe $2\frac{1}{4}$ Loth weniger wiegen als im leeren Raum. Wäre der Körper leichter als $2\frac{1}{4}$ Loth, wöge er z. B. nur 2 Loth, so würde er in der Luft so lange emporsteigen, bis er mit der verdrängten Luft ins Gleichgewicht kommt. Weil nämlich die Luft compressibel ist, so müssen die untern Luftschichten, wegen des Gewichts der darüber liegenden, dichter sein, als in höhern Regionen. Der

Körper muss also beim Emporsteigen durch immer dünnere Luftschichten endlich mal in eine solche kommen, von welcher ein Cubikfuss just so viel wiegt, als der Körper. Dieser Auftrieb der Luft ist bei seinen Wägungen, zur Bestimmung der specifischen Gewichte der Körper, zu berücksichtigen.

205.

Luftballon. Der nothwendig allenthalben Statt findende Auftrieb der Luft brachte Montgolfier (1783) auf den Einfall, den bereits in der Poesie ausgeführten Gedanken: durch die Luft zu fliegen, auch in der Wirklichkeit auszuführen.

Es liesse sich nun wohl aus Blech eine so grosse Hohlkugel herstellen, die, wenn sie luftleer gemacht werden könnte, weniger wöge, als die durch sie verdrängte Luft, allein eine solche luftleere Kugel würde ihre Ausdehnung nicht behalten, sondern durch den äussern Luftdruck gleich zusammengedrückt werden. Um dies Zusammenfallen der Kugel zu verhüten, benutzte Montgolfier die durch die Wärme verdünnte und zugleich gesteigerte Ausdehnungskraft der Luft und verfertigte, unter andern, einen kugelförmigen, unten mit einem offenen Halse versehenen Luftballon aus gefirnisster Leinwand, der 35 Fuss Durchmesser hatte und 450 ℔ wog. Die Luft im Ballon wurde durch Strohfeuer so stark erwärmt und verdünnt, dass ein Drittel derselben aus dem Ballon herausgedrängt wurde und folglich der Auftrieb (Steigkraft) S des Ballons gleich dem dritten Theil des Gewichts der von ihm verdrängten Luft war, nämlich (bei 0^0):

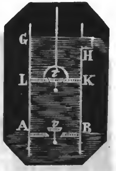
$$S = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{35^3}{6} \cdot 3\tfrac{1}{7} \cdot 2\tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{32} = 643 \text{ ℔}$$

Der folglich aufsteigende Ballon konnte also ausser seinem Gewichte noch eine Last von nahe 193 ℔ tragen.

Gleich darauf wurden wirkliche Luftfahrten von muthigen Personen unternommen, statt aber die Ballons mit erwärmter und dadurch verdünnter Luft zu füllen, nahm man dazu Wasserstoffgas, welches rein 14mal leichter ist, als atmosphärische Luft. Jetzt füllt man die Ballons gewöhnlich mit billigerm Steinkohlengas, welches gereinigt nahe 4 mal leichter als atmosphärische Luft ist.

Obgleich die Luftschifffahrt seit Montgolfier's Zeiten nur sehr geringe Fortschritte gemacht und man noch nicht mal die regelmässigen Passate, Moussons, Land- und Seewinde benutzt hat, so wird man ihre Förderung doch immer von Neuem wieder versuchen, und die steten Fortschritte der Physik werden hoffentlich auf ein Mittel führen, ein Luftschiff nach verschiedenen Richtungen zu treiben und jeden Vogel einzuholen. Die Manövrirung eines solchen Luftschiffes wird dann aber wohl eben so gut erlernt werden müssen, als die eines Seeschiffes.

206.



Saugpumpe. Bei der Benutzung des Luftdrucks, um vermittelst einer Pumpe mit Boden- und Kolbenventil (sog. Saugpumpe) Wasser auf eine Höhe AG zu heben, ist zu beachten, dass man ausser der Wassersäule GK gleichzeitig auch die unter dem Kolben stehende Wassersäule LB mit zu heben hat, mithin eine Wassersäule vom Querschnitt des Kolbens und der Höhe AG, die Pumpe möge, wie gewöhnlich, überall gleich weit oder auch unterhalb des Kolbens enger sein, ein sogenanntes Saugrohr haben.

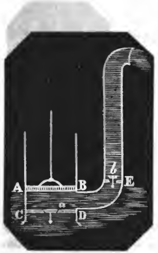
Dieser ungereimt scheinende Satz erhellet folgendermassen: Angenommen, die unter dem Kolben befindliche Wassersäule LB wäre gerade mit dem Luftdruck im Gleichgewicht, also LA = 32 Fuss. Wollte man jetzt den Kolben noch höher ziehen, so würde unter demselben ein luftleerer Raum entstehen, auf denselben aber die Wassersäule GK und ausserdem noch die Luft auf der Oberfläche GH mit dem Gewichte einer Wassersäule von 32′ Höhe und LK als Grundfläche drücken. Beide Gewichte müssten also, beim weitern Emporziehen des Kolbens gehoben werden, mithin die ganze Wassersäule GB.

Wäre die Wassersäule LB nur 8′ hoch, so drückt das Wasser unten auf den Kolben (weil der Luftdruck es 32′ hoch zu heben bestrebt ist) noch mit dem Gewichte einer Wasser-

säule von 32 — 8 = 24' Höhe, und da der Gegendruck der Luft von oben nach unten auf den Kolben allemal gleich dem Gewichte einer Wassersäule von 32' Höhe ist, so bleibt ausser der Wassersäule GK noch eine Wassersäule von derselben Grundfläche und von 32—24=8' Höhe, d. i. die ganze Wassersäule GB zu heben. Ist demnach die Höhe, auf welche das Wasser gehoben werden soll, nämlich AG = h = 20', der Radius des Kolbens r = 3'' und γ = 66 ℔, so hat man, von der geringen Reibung, dem Gewichte des Kolbens, der Stange etc. abstrahirt, für die Kraft P, welche ohne Hebel mit der zu hebenden Last im Gleichgewicht ist:

$$P = hr^2\pi\gamma$$
$$P = 259\tfrac{3}{7} \text{ ℔}$$

207.



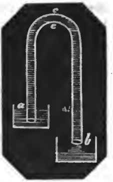
Druckpumpe. Das Wasser dringt hier aus hydrostatischen Gründen von selbst so weit ins Kolbenrohr, bis dessen innere Oberfläche AB mit der äussern in einerlei Niveau ist. Wird nun der wasserdicht schliessende Kolben niedergedrückt, so schliesst sich durch Fortpflanzung dieses Drucks das Ventil a und das Ventil b öffnet sich, und man kann durch wiederholte Kolbenspiele das Wasser in dem Steigrohre bis zu einer beliebigen Höhe $= h$, z. B. = 40' über dem Niveau AE emportreiben. Von der Reibung abstrahirt und den Radius des Kolbens $= r$, z. B. = 3'' gesetzt, hat man für die dazu erforderliche Kraft P (§ 171):

$$P = hr^2\pi\gamma$$
$$P = 518\tfrac{6}{7} \text{ ℔}$$

Bei der Druckpumpe kommt also der Luftdruck gar nicht in Betracht. Wäre aber CD das Niveau des Wassers, so hätte man eine Druckpumpe mit einer Saugpumpe verbunden (vergl § 161 und 61).

208.

Heber. Ein umgebogenes, an beiden Enden offenes Rohr, dessen einer Schenkel gewöhnlich etwas länger ist, heisst ein Heber, und man bedient sich desselben, um vermittelst des Luftdrucks eine Flüssigkeit aus einem Gefässe *a* in ein anderes *b* überfliessen zu lassen.



Wird nämlich der Heber mit der überzuleitenden Flüssigkeit erst ganz gefüllt, dann beide auf irgend eine Weise verschlossen gehaltenen Mündungen in die Gefässe geleitet und nun der Verschluss wieder weggenommen, so geht die Flüssigkeit aus dem Gefässe *a* durch den Heber hindurch in das Gefäss *b*. Wie geht das zu?

Antwort. Ist die Höhe der Wassersäule *ac* kleiner als 32 Fuss (und das muss sie sein, wenn die Erscheinung eintreten soll), ist sie z. B. 20 Fuss, so wirkt auf den durch den höchsten Punct *c* gedachten verticalen Durchschnitt *ce* noch der horizontale Druck einer Wassersäule von $32 - 20 = 12$ Fuss Höhe, von der Linken gegen die Rechte. Ist nun die Wassersäule *eb* etwas länger als *ac*, ist sie z. B. 21 Fuss hoch, so ist der horizontale Gegendruck auf die verticale Wasserschicht *ce* nur gleich dem einer Wassersäule von $32 - 21 = 11$ Fuss Höhe, folglich ist kein Gleichgewicht vorhanden. Der Druck auf *ce* von der Linken gegen die Rechte ist also um das Gewicht der Wassersäule von $12 - 11 = 1$ Fuss Höhe grösser, als von der Rechten gegen die Linke und das Wasser fliesst durch den längern Schenkel ab. Mit dem Sinken des Wassers im Gefässe *a* wird natürlich der erwähnte Ueberschuss des Drucks von der Linken gegen die Rechte immer kleiner und endlich $= 0$.

209.

Höhe der Atmosphäre. Wäre das die Erde umgebende und auf ihr ruhende Luftmeer überall von gleicher Dichtigkeit, so liesse sich die Höhe desselben leicht berechnen. Weil

nämlich bei 0° und 28″ die Luft 770mal leichter, als Wasser ist (§ 201), so wäre, bei vorausgesetzter gleicher Dichtigkeit, die Höhe der Atmosphäre = 770 . 32 = 24640 Fuss und würde also noch nicht mal über die höchsten Berge hinwegragen, da der Dawalagiri über 26000′ hoch ist. Weil aber die Luft, je höher man in ihr aufsteigt, immer dünner und dünner wird, so ist klar, dass die Atmosphäre bedeutend höher sein muss.

Wie hoch die Atmosphäre eigentlich ist, lässt sich auch nicht annähernd bestimmen. Wohl aber lassen sich eine untere und eine obere Grenze angeben, welche erstere sie nothwendig überschreiten muss, die zweite aber nicht überschreiten kann. Aus der Dauer der astronomischen Dämmerung ergiebt sich nämlich, dass die Luft das Sonnenlicht noch in einer Höhe von 10 Meilen reflectirt, so weit muss sie sich also **wenigstens** erstrecken. Aus dynamischen Gründen folgt aber, dass die Atmosphäre jedenfalls nicht weiter gehen kann, als wo die Centrifugalkraft der Anziehungskraft der Erde gleich wird. Denn was etwa über dieser Grenze hinaus liegt, ist von der Erde getrennt und gehört nicht mehr zu ihr.

210.



Barometrisches Höhenmessen. Steigt man mit einem Barometer einen Berg hinan, so ist klar, dass das Quecksilber im Rohre desto mehr sinken muss, je höher man steigt, weil ja die auf den offenen Schenkel drückende Luftsäule immer kürzer und auch dünner wird.

Denkt man sich eine verticale Luftsäule in horizontale Schichten von gleicher Höhe AC = CE = etc. getheilt, so ist der Druck auf die Schicht CD geringer als auf AB, auf EF wieder geringer als auf CD etc. Steigt man mit dem Barometer von A bis C und sinkt das Quecksilber z. B. um eine Linie, so kann es, wenn man noch um eine gleiche Höhe von C bis E steigt, nicht abermals um eine Linie sinken, weil die Dichtigkeiten, also auch die Gewichte der Schichten AD, CF nicht gleich sind. Dennoch ist klar, dass das Sinken des Quecksilbers im Barometer-

rohr eine bestimmte Function von der durchlaufenen Höhe ist, und diese zu finden ist jetzt unsre Aufgabe.

Nehmen wir vorläufig an, die Dichtigkeit der horizontalen Schichten nehme nicht stetig, sondern sprungweise ab, und es sei die Dichtigkeit der Luft von AB bis CD überall dieselbe, und $=d$. Ebenso die Dichtigkeit von CD bis EF überall $=d'$ etc., welche Annahme um so weniger falsch ist, je kleiner die gleichen Höhen $AC=CE=$ etc. der Luftschichten gedacht werden. Es sei ferner der Druck auf $AB=p$, auf $CD=p'$ etc., wo p, p', .. in Gewicht ausgedrückt sind, so hat man unter der vorläufigen Voraussetzung, dass alle Luftschichten gleiche Temperatur haben (§ 195):

$$\frac{d'}{d}=\frac{p'}{p}\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

und da $p-p'$ das Gewicht der Luftsäule AD, und ebenso $p-p''$ das Gewicht der Säule CF etc., so ist auch:

$$\frac{d'}{d}=\frac{p'-p''}{p-p'}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$\frac{p'}{p}=\frac{p'-p''}{p-p'},\text{ woraus:}$$
$$p:p'=p':p''.$$

Ebenso ist klar, dass auch $p':p''=p'':p'''$ etc., d. h. der Factor (Exponent) e, womit man den Druck p multipliciren muss, um p' zu erhalten, ist derselbe, als womit man p' multipliciren muss, um p'' zu erhalten etc., so dass also die Drücke p, p', p'', ... mithin auch die ihnen entsprechenden Barometerhöhen in einer geometrischen Progression abnehmen, so wie die Höhen der Luftschichten in arithmetischer Progression zunehmen. Dieses Gesetz findet offenbar strenge Statt, wenn wir uns die Höhen der horizontalen Luftschichten unendlich klein denken, denn dann nehmen ihre Dichten stetig ab.

Es kommt also nur noch darauf an, diesen Exponenten e

für eine **beliebige***) Höhe durch einen unmittelbaren Versuch zu bestimmen.

Nun hat de Luc durch directe Messungen gefunden, dass bei 0° und 336‴ das Quecksilber um eine Linie oder auf 335‴ fällt, wenn das Barometer um 72,75 Fuss, oder wie später Ramond, durch genauere trigonometrische Messungen, gefunden, um 73′,07 höher getragen wird. Der fragliche, dieser Höhe entsprechende Exponent ist demnach $e = \frac{335}{336}$. Multiplicirt man also die in irgend einer Luftschicht beobachtete Barometerhöhe B mit e, so giebt das Product $B . e$ die Barometerhöhe in der um 73,07 Fuss höher liegenden Luftschicht. Multiplicirt man nochmals mit e, so muss Be^2 die Barometerhöhe in der um 2mal 73′,07 höher liegenden Schicht sein etc. Ist demnach die Barometerhöhe in der untern Station $= B$, in der obern $= b$ beobachtet, so braucht man nur zu finden, mit der **wievielsten** Potenz von e man B multipliciren muss, um b zu erhalten, denn ebenso viel mal 73,07 Fuss beträgt der verticale Abstand beider Stationen. Heisst n der fragliche Potenz-Exponent, so hat man zur Bestimmung desselben die Gleichung: $Be^n = b$ und hieraus (Algebr. § 285):

$$n = \frac{1}{log\ e} . (log\, b - log\, B)$$

Man hat also für den gesuchten verticalen Abstand h beider Stationen, indem man 73′,07 mit der für n gefundenen Zahl multiplicirt:

$$h = \frac{73{,}07}{log\ e} (log\ b - log\, B) \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

oder da $log\, e = log\, 335 - log\, 336 = -0{,}0012945$ und $\frac{73{,}07}{-0{,}0012945}$ $= -56446{,}3$, indem man noch die Vorzeichen beider negativen Grössen umkehrt, in Pariser Fuss:

$$h = 56446 . (log\, B - log\, b) \ldots\ldots\ldots (2)$$

Diese Formel gilt aber nur für eine mittlere geographische

*) Hat man zwei zusammengehörige arithmetische und geometrische Progressionen, und man schaltet in gleichen Intervallen übereinstimmende Glieder aus, so erhält man wieder zwei zusammengehörende Progressionen

Aus 1, 2, 3, 4, 5, 6, und 16, 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, folgt z. B.: 1, 3, 5, 7. 16, 4 1, $\frac{1}{4}$.

Breite von 45° und für 0° Temperatur. So genaue Resultate, wie directe trigonometrische Messungen, kann sie schon deshalb nicht geben, weil die hier gemachte Voraussetzung, dass die ganze durchlaufene Luftsäule überall gleich trocken und von gleicher Temperatur sei, nicht zulässig ist. Ohnehin müsste, ausser der Feuchtigkeit, der Temperatur der Luft und des Quecksilbers, auch noch die Ausdehnung der messingenen Scale, die Abnahme der Schwere und die geographische Breite berücksichtigt werden. Für diese geforderte Genauigkeit haben Laplace und Gauss Formeln entwickelt und die Rechnungen darnach erleichternde Tabellen entworfen. S. unter andern Köhler's fünfzifferige Logarithmentafeln.

Die bedeutendste Correction, welche an vorstehende Formel angebracht werden muss, rührt von der Temperatur der Luft her und diese wollen wir noch anbringen.

Die in Formel (2) als trocken vorausgesetzte Luft von 0° dehnt sich für jeden Centesimalgrad Wärme um 0,00366 ihres Volumens aus (§ 202). Nehmen wir, wegen der in der Luft immer mehr oder minder enthaltenen specifisch leichtern Wasserdämpfe statt des Coefficienten 0,00366 auf Gerathewohl 0,004, und nehmen wir statt der Lufttemperaturen an der untern und obern Station T, t ebenfalls auf's Gerathewohl eine mittlere $\frac{1}{2}$ $(T+t)$ für die ganze durchlaufene Höhe, so haben wir statt der Zahl 73,07 die Zahl $[1+0{,}004.\frac{1}{2}\ (T+t)]$ $73{,}07 = [1+0{,}002\ (T+t)]$ 73,07 zu setzen und haben dann statt der Formel (2) genauer:

$$h = 56446\ [1+0{,}002\ (T+t)]\ (\log B - \log b) \ldots (3)$$

Beweis 1. Zur Bestimmung der Höhe des Herzbergs bei Ilfeld wurde gleichzeitig beobachtet:

$$B = 326''',5; \qquad T = 7^0,8; \qquad 1 + \frac{2(T+t)}{1000} = 1{,}028$$
$$b = 317{,}8; \qquad t = 6{,}2$$

$$\begin{array}{ll} \log B = 2{,}51388 & \log\left(1+\frac{T+t}{500}\right) = 0{,}01199 \\ \ldots b = 2{,}50215 & \ldots.\ 56446 = 4{,}75163 \\ \hline K = 0{,}01173 & \ldots\ K = 0{,}06930 - 2 \\ & \ldots\ h = 2{,}83292 \\ & h = 680',6. \end{array}$$

Gauss findet, mit Berücksichtigung der geogr. Breite des Herzbergs (51° 34′) und der Temperatur des Quecksilbers,

welche $T' = 7^0,6$ R und $t' = 6^0,4$ R war, 113,268 Toisen = 679,608 Fuss.

Beispiel 2. Saussure beobachtete einen mètre unter dem Gipfel des Montblanc $b = 0^m,4342$ *) und $t = -2^0,87$. Gleichzeitig wurde 35^m über dem Genfer See $B = 0^m,7385$ und $T = 28^0,25$ beobachtet. Hieraus ergiebt sich die Höhe des Montblanc = 13678 Fuss = 4443 mètres. Laplace findet mit Berücksichtigung der erwähnten kleinern Correctionen 4447^m. Coraboeuf fand durch genauere trigonometrische Messungen 4436^m. Man sieht hieraus, dass die Formel (3) für eine geogr. Breite von 40 bis 50° die Höhen ziemlich genau giebt.

*) Weil $\log B - \log b = \log\left(\frac{B}{b}\right)$, so ist es gleichgültig, in welchem Maasse man B und b ausdrückt. 1 mètre = 3,07844 Fuss.

IV. Theil.

Dynamik fester Körper.

Fünfzehntes Buch.

Von der gleichförmigen, gleichförmig beschleunigten und gleichförmig verzögerten Bewegung.

211.

Wie schon in der Einleitung (§ 9) angedeutet, hat die Dynamik die Gesetze aufzustellen, nach welchen sich ein nicht im Gleichgewicht (Ruhe) befindlicher Körper bewegen muss. Man kann z. B. fragen, welche Bahn ein solcher Körper beschreibt, mit welcher Geschwindigkeit er sich bewegt, oder wie gross die den Körper in Bewegung setzende Kraft sein muss, damit er sich auf vorgeschriebener Bahn, mit Ueberwindung aller Hindernisse (Reibung, Widerstand der Luft, des Wassers &c.) mit einer bestimmten Geschwindigkeit bewegt, welche Wirkung ein sich bewegender Körper auf einen andern ausübt, z. B. ein Rammbär auf einen einzurammenden Pfahl; welche Wirkung die sich bewegende Luft auf die Segel eines Schiffes oder einer Mühle, oder das Wasser auf die Schaufeln eines Rades ausübt &c. &c. Solche und ähnliche Probleme sind Gegenstand der Dynamik.

212.

Um jedoch die Sache möglichst zu vereinfachen, betrachten wir zunächst nur die reine Bewegung an sich, d. h. wir abstrahiren zuerst von allen Widerständen, wie Reibung &c., so wie auch von der Masse des sich bewegenden Körpers und von der Kraft, welche ihn in Bewegung setzt. Wir nehmen also zuerst an, dass ein idealer gewichtsloser Körper, oder ein Punct, sich von selbst und im leeren Raum bewegt. Erst nachdem wir die reinen Bewegungsgesetze oder Bewegungsgleichungen für solche ideale Körper gefunden, können wir auch die erwähnten Umstände und physischen Eigenschaften der Körper mit in Betracht ziehen.

Von den unzähligen Gesetzen, nach welchen ein Punct sich bewegen kann, haben wir uns vorläufig zwei als besonders wichtig wohl zu merken, nämlich die gleichförmige und gleichförmig beschleunigte oder verzögerte Bewegung.

213.

1. **Gleichförmige Bewegung.** Bewegt sich ein Punct (in grader oder krummer Linie) so, dass seine Geschwindigkeit immer dieselbe bleibt, und folglich die Länge des durchlaufenen Weges der Zeit proportional wächst, so sagt man, der Punct bewege sich gleichförmig (gleichmässig). Die Bewegung des Schalls in einem gleichartigen Mittel ist eine gleichförmige. Ebenso die des Lichts. Auch die Technik sucht diese Art Bewegung hervorzubringen, und man hat hier beinahe das Ideal erreicht. Es giebt Chronometer, die in einem Jahr nur eine Secunde gewinnen oder verlieren.

214.

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit eines sich gleichförmig bewegenden Punctes, nämlich den Raum, den er in einer Secunde durchläuft (§ 4), mit c (*celeritas*), die in Secunden ausgedrückte Zeit, während welcher er sich bewegt, mit t (*tempus*) und die Länge des in dieser Zeit durchlaufenen Weges mit s (*spatium*), so hat man zur Beurtheilung aller Umstände dieser reinen Bewegung folgende drei einfache Gleichungen:

$$s = c . t \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$c = \frac{s}{t} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$t = \frac{s}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Anmerkung. Weil bei jeder Multiplication der Multiplicator eine unbenannte Zahl sein muss, indem man keine ungleichartigen Dinge mit einander verbinden kann, so versteht sich von selbst, dass in den Formeln (1) und (2) abgekürzt t statt $\frac{t''}{1''}$ und in (3) $\frac{s}{c}$ statt $\frac{s}{c} \cdot 1''$ steht. Aehnliche Bemerkungen gelten für alle analytischen Ausdrücke.

215.

Aufgabe 1. Ein Punct am Umfange eines sich gleichförmig drehenden Schwungrades hat die Geschwindigkeit von $c = 20$ Fuss. Wie viele Umläufe n macht dieses Rad in $t = 5$ Minuten $= 300$ Secunden, wenn der Radius desselben $r = 4$ Fuss ist? ($\pi = 3\frac{1}{7}$).

Aufgabe 2. Die Erde dreht sich in $T = 86164$ Secunden um ihre Achse. Wie gross ist die Geschwindigkeit c eines Puncts im Aequator, dessen Umfang $= 5400$ Meilen (1 Meile $= 23602$ Fuss rhl.).

Aufgabe 3. Ein Punct am Umfange eines Schwungrades, dessen Radius $r = 5$ Fuss, hat die Geschwindigkeit $c = 25'$. In wie viel Secunden macht das Rad $n = 1000$ Umläufe?

Antwort 1. Es ist: $n = \frac{ct}{2r\pi} = 238{,}6$.

Antwort 2. Es ist: $c = \frac{2r\pi}{T} = 1479'$.

Antwort 3. Es ist: $t = \frac{2r\pi . n}{c} = 1257''$.

216.

2. Gleichförmig beschleunigte und verzögerte Bewegung. Bewegt sich ein Punct (in grader oder krummer Linie) immer schneller und schneller, und zwar so, dass die stete Zunahme

seiner Geschwindigkeit der Zeit genau proportional wächst, so sagt man, der Punct habe eine gleichförmig beschleunigte Bewegung und nennt die Zunahme der Geschwindigkeit während einer Secunde die Beschleunigung. Setzt sich z. B. ein Punct aus der Ruhe in eine solche Bewegung und ist seine Geschwindigkeit am Ende der 1sten Secunde = 12 Fuss, am Ende der 2ten Secunde = 24 Fuss, am Ende der 3ten Secunde = 36′ &c., so ist hier die Beschleunigung = 12′.

Ebenso kann man sich die Vorstellung machen, ein in Bewegung befindlicher Punct fange an, sich immer langsamer zu bewegen, und zwar so, dass die stete Abnahme seiner Geschwindigkeit der Zeit genau proportional wächst. Eine solche Bewegung heisst eine gleichförmig verzögerte.

Anmerkung. Diese letzteren beiden gesetzmässigen Bewegungen, nämlich die gleichförmig beschleunigte und gleichförmig verzögerte finden näherungsweise in der Natur, namentlich bei dem, im nächsten Buche umständlich zu besprechenden, freien Fall und verticalen Aufsteigen der Körper Statt, und obgleich sich noch unzählige andere Bewegungsgesetze denken lassen und auch in der Natur vorkommen, z. E. die Bewegungen der Himmelskörper, des Blutes in den Adern, das Wachsen der Pflanzen &c., so werden wir hier doch nur die Gleichungen für erstere beiden Bewegungen entwickeln.

217.

Bezeichnen wir die gleichförmige Beschleunigung eines von der Ruhe aus sich bewegenden Punctes mit k, und die nach t Secunden erlangte sogenannte Endgeschwindigkeit mit v, so hat man zuerst $v = kt$, d. h., wenn jetzt die Beschleunigung aufhörte, so würde sich der Punct mit dieser in t Secunden erlangten Geschwindigkeit kt gleichförmig bewegen, also in jeder folgenden Secunde einen Raum $= kt$ gleichförmig durchlaufen.

Um den Weg s zu finden, den der Punct bei der gleichförmigen Beschleunigung k nach t Secunden durchlaufen hat, und dessen Geschwindigkeit zu Anfang der 1sten Secunde $= 0$ und am Ende der $t$ten Secunde $= kt$ war, denke man sich einen 2ten Punct, der sich gleichzeitig und gleichförmig verzögernd bewegt, und zwar so, dass seine Verzögerung auch $= k$, und dessen Geschwindigkeit zu Anfang der 1sten Secunde $= kt$ und also am Ende der $t$ten Secunde $= 0$ ist,

so wird dieser 2te Punct offenbar einen just so langen Weg s, wie der 1ste Punct durchlaufen. Denkt man sich nun noch einen dritten Punct, der sich gleichzeitig mit den beiden erstern bewegt und in jedem Augenblick eine Geschwindigkeit hat, welche gleich der Summe der Geschwindigkeiten der beiden erstern Puncte ist, so wird dieser dritte Punct in derselben Zeit (in t Secunden) offenbar einen Weg $= 2s$ durchlaufen. Nun ist aber die Summe der Geschwindigkeiten der beiden ersten Puncte in jedem Augenblick immer $= kt$; denn zu Anfang der 1sten Secunde ist sie $= 0 + kt$; am Ende der 1sten Secunde $= k + (kt - k) = kt$, am Ende der 2ten Secunde $= 2k + (kt - 2k) = kt$ &c. Der fingirte dritte Punct bewegt sich also gleichförmig mit der Geschwindigkeit kt und durchläuft also in t Secunden einen Weg $= kt.t$ und da dieser $= 2s$ sein muss, so hat man $2s = kt^2$, woraus $s = \frac{1}{2}kt^2$.

Anmerkung. Diese beiden Formeln für die gleichförmig beschleunigte Bewegung, nämlich:

$$v = kt \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$s = \tfrac{1}{2}kt^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

kommen häufig zur Anwendung, sie sind als die Fundamentalformeln der ganzen Dynamik zu betrachten und es ist deshalb gut, sie im Gedächtniss zu haben.

218.

Hat der sich in grader oder krummer Linie bewegende Punct zu Anfang der 1sten Secunde schon eine Geschwindigkeit $= c$ und tritt nun eine gleichförmige Beschleunigung $= k$ hinzu, so ist seine Geschwindigkeit am Ende der 1sten Secunde $= c + k$, am Ende der 2ten Secunde $= c + 2k$, am Ende der $t$ten Secunde $v = c + kt$. Um den in dieser Zeit t durchlaufenen Weg s zu finden, denke man sich einen Punct, der sich gleichzeitig mit gleichförmiger Verzögerung $= k$ bewegt und dessen Geschwindigkeit zu Anfang der 1sten Secunde $= c + kt$, also am Ende der 1sten Secunde $= c + kt - k$, am Ende der 2ten Secunde $= c + kt - 2k$ &c., am Ende der $t$ten Secunde $= c$, so wird dieser Punct in derselben Zeit t offenbar einen gleichen Weg s, wie der erstere durchlaufen. Denkt man nun wieder einen dritten Punct, der sich gleichzeitig bewegt und in jedem Augenblicke die Summe der Geschwindig-

keiten der beiden erstern Puncte hat, so wird dieser sich nothwendig gleichförmig mit der Geschwindigkeit $2c+kt$ bewegen und in t Secunden den doppelten Weg durchlaufen, nämlich: $2s=(2c+kt).t$. In diesem Falle haben wir also die beiden Gleichungen:

$$v=c+kt\ldots\ldots(1)$$
$$s=ct+\tfrac{1}{2}kt^2\ldots\ldots(2)$$

219.

Hat der sich bewegende Punct zu Anfang der 1sten Secunde eine Geschwindigkeit $=c$ und tritt nun eine gleichförmige Abnahme derselben $=k$ ein, so hat man für die gleichförmig verzögerte Bewegung, nach denselben Schlüssen wie im vorhergehenden §, offenbar die beiden Gleichungen:

$$v=c-kt\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$s=ct-\tfrac{1}{2}kt^2\ldots\ldots\ldots(2)$$

Sechszehntes Buch.

Von der Bewegung eines frei fallenden und vertical aufsteigenden Körpers.

220.

Ein jeder nicht unterstützter Körper muss aus den angegebenen Gründen nach verticaler Richtung zur Erde fallen (§ 38). Wir können hierbei annehmen, dass der frei fallende Körper von der Erde immer gleich stark angezogen wird. *) Daraus folgt dann aber, dass der Körper, vom Widerstande der Luft abstrahirt, also im leeren Raume, eine gleichförmig beschleunigte Bewegung annehmen muss. Denn ist der von der Ruhe aus fallende Körper der fortwährend mit gleicher Intensität wirkenden Anziehungskraft während einer Secunde unterworfen, so hat er, sich immer schneller bewegend, am Ende der Secunde eine gewisse noch unbekannte Geschwindigkeit erlangt, die wir mit g (Gravitation) bezeichnen wollen. Weil nun ein willenloser Körper ebenso unfähig ist, sich von selbst zu bewegen, als die ihm einmal eingeprägte Geschwindigkeit wieder zu zerstören, so müsste der Körper, wenn nach Ende der 1sten Secunde die Anziehungskraft der Erde plötzlich

*) Wie Newton zuerst gezeigt hat, nimmt die Kraft, mit welcher die Erde einen Körper anzieht, nach dem Quadrate der Entfernung des Körpers vom Mittelpunct der Erde ab. Bei kleinen, nicht über eine Meile grossen Fallhöhen aber ist diese Abnahme der Schwerkraft noch gar nicht merklich und also = 0 zu setzen.

aufhörte, in jeder der folgenden Secunden einen Raum $= g$ gleichförmig durchlaufen. Da nun aber die Anziehungskraft der Erde fortwährend und mit immer gleicher Intensität, also auch mit gleichem Erfolg auf den Körper wirkt, oder was auf dasselbe führt, der Körper immer dasselbe Bestreben hat, gegen die Erde zu fallen (zu gravitiren), so muss auch nach Ende der 2ten, 3ten ... Secunde, die Wirkung 2-, 3-...mal so gross sein und mithin der Körper sich gleichförmig beschleunigend bewegen, und seine Geschwindigkeit am Ende der zweiten Secunde $= 2g$, allgemein am Ende der $t$ten Secunde $= gt$ sein. Dies erhellet auch, wenn man sich die immer gleich grosse Anziehungskraft, statt stetig, in jedem Augenblick ruckweise wirksam denkt, dann ist nach 2, 3...t Secunden die Summe der gleichen Impulse, also auch die Ursache der Bewegung, mithin auch die Wirkung 2, 3 ... $t$mal so gross. Bezeichnen wir also die Endgeschwindigkeit eines frei fallenden Körpers nach t Secunden wieder mit v (*velocitas*), die in dieser Zeit durchlaufene Höhe mit h, so haben wir nach den schon § 217 gefundenen, für alle gleichförmig beschleunigten Bewegungen (auf allen Himmelskörpern) geltenden Gesetzen, hier:

$$v = gt \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$h = \tfrac{1}{2} g t^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

und es kommt nur noch darauf an, die in diesen Formeln enthaltene constante Grösse g in Bezug auf unsere Erde zu kennen, um alle über den freien Fall eines Körpers vorkommende Fragen beantworten zu können.

221.

Der Werth von g, nämlich die gleichförmige Beschleunigung eines im leeren Raume fallenden Körpers, hängt offenbar von der Stärke der Anziehungskraft der Erde, nicht aber von der Masse des Körpers ab, weil die einzelnen Theilchen (Atome) desselben gleich stark angezogen werden und also gleiche Geschwindigkeit erlangen, ob sie getrennt neben einander liegen oder durch die Cohäsionskraft zu einem festen Körper mit einander verbunden sind. Im luftleeren Raum fallen also alle Körper gleich schnell und da, wenn die fallen-

den Körper wenigstens 800mal dichter als die Luft sind, man, bei kleinen Fallhöhen, auch vom Widerstande der Luft abstrahiren kann, so bedürfte es, um das fragliche g zu bestimmen, offenbar nur eine einzige genaue Beobachtung, um dasselbe nach dem durch reine Vernunftschlüsse gefundenen Fallgesetze $h = \frac{1}{2} g t^2$ zu berechnen.

Hätte man z. B. beobachtet, dass ein Körper in $t = 4$ Secunden durch eine Höhe $h = 250$ Fuss gefallen, so hätte man: $250 = \frac{1}{2} g \,.\, 4^2$, woraus: $g = 31\frac{1}{4}$ Fuss.

Da aber alle Beobachtungen mit kleinen Fehlern behaftet sind, so liess Galilei, der zuerst die Lehre vom freien Fall der Körper aufgestellt hat, einen Körper durch verschiedene gemessene Höhen fallen, zählte die jedesmal darüber verflossene Anzahl Secunden und nahm von den nach der Formel $h = \frac{1}{2} g t^2$ berechneten und nur um einen kleinen Bruchtheil verschiedenen g das arithmetische Mittel. Später hat man durch Pendelbeobachtungen gefunden, dass dies g mit der geographischen Breite des Beobachtungsortes, jedoch nur unbedeutend wächst. Unterm Aequator ist $g = 31',149$ und am Pol $g = 31,257'$ preuss. Wir nehmen in den folgenden Beispielen, bei welchen wir vorläufig vom Widerstande der Luft abstrahiren, immer $g = 31\frac{1}{4}'$ preuss. $= 9,81$ mètre.

Anmerkung. Diese Beschleunigung eines frei fallenden Körpers (d. h. die nach Ende der 1sten Secunde erlangte Geschwindigkeit), kann uns zugleich als Maass für die Grösse der Anziehungskraft der Erde dienen. Auf der Oberfläche des Mondes ist (aus astronomischen Gründen) die Beschleunigung eines dort fallenden Körpers nur $= 6'$, auf der Sonne $= 860'$. Die Anziehungskraft der Sonne ist also 28mal grösser, als die der Erde. Dieselbe Masse, die mittelst einer Federwaage auf der Erde einen Druck (Gewicht) von 100 ℔ anzeigt, würde auf der Sonne ein Gewicht von 2800 ℔ haben und auf dem Monde nur 20 ℔ wiegen. Man sieht hieraus den Unterschied zwischen Masse und Gewicht eines Körpers.

222.

Aufgabe. Ein von der Ruhe aus frei fallender Körper braucht $t = 6''$, um eine gewisse Höhe (z. B die Tiefe eines Brunnens) zu durchlaufen. Welche Geschwindigkeit v hatte er am Ende der 6ten Secunde, und wie gross ist die fragliche Höhe h?

Antwort. Nach der Formel $v = gt$ (§ 220) hatte der Körper die Geschwindigkeit $v = 31\frac{1}{4}.6 = 187\frac{1}{2}'$ erlangt, d. h. wenn er noch weitern Fallraum gehabt und die Schwerkraft nicht weiter auf ihn gewirkt hätte, so würde er mit Anfang der 7ten Secunde sich gleichförmig bewegt und in jeder Secunde einen Raum von $187\frac{1}{2}'$ durchlaufen haben.

Zufolge der 2ten Formel $h = \frac{1}{2}gt^2$ ist die in 6 Secunden durchlaufene Höhe $h = \frac{1}{2}.31\frac{1}{4}.6^2 = 562\frac{1}{2}'$.

Anmerkung. Aus dieser 2ten Formel folgt: dass die durchlaufenen Höhen eines frei fallenden Körpers den Quadraten der Zeiten proportional wachsen.

223.

Ist von den drei, beim freien Fall eines Körpers in Betracht kommenden veränderlichen Grössen v, t, h, eine gegeben, so kann man, vermöge der beiden Gleichungen $v = gt$ und $h = \frac{1}{2}gt^2$, jede der beiden andern finden. Sind nämlich die gegebene und gesuchte Grösse in einer der beiden Gleichungen enthalten, so braucht man diese nur auf die gesuchte Grösse zu reduciren. Sind sie aber in beiden zerstreut enthalten, so kann man erst die dritte Grösse eliminiren, man erhält dann folgende sechs Gleichungen:

$$v = gt \qquad (1)$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$

$$t = \frac{v}{g} \qquad (3)$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (4)$$

$$v = \sqrt{2gh} \qquad (5)$$

$$h = \frac{v^2}{2g} \qquad (6)$$

224.

Aufgabe 1. Welche Geschwindigkeit v erlangt ein Körper, der von einer Höhe $h = 160'$ herabfällt?

2. Wie viel Zeit t gebraucht ein Körper, um von einer Höhe $h=200'$ herabzufallen?

Antwort. Es ist 1) $v=\sqrt{2gh}=100'$; und 2) $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}=$ 3,57 Secunden.

225.

Vertical steigende Körper. Ein aus der Ruhe frei fallender Körper hat am Ende der ersten Secunde eine Geschwindigkeit $g=31\frac{1}{4}'$ und ist durch eine Höhe $h=\frac{1}{2}g=15\frac{5}{8}'$ gefallen. Am Ende der 4ten Secunde hat er eine Geschwindigkeit $=4.g=125$ und eine Höhe $h=\frac{1}{2}g.4^2=250'$ durchlaufen &c Umgekehrt muss also auch ein vertical aufsteigender Körper, vermöge der immer gleich stark und der Bewegung entgegengesetzt wirkenden Anziehungskraft der Erde, von seiner anfänglichen Geschwindigkeit in jeder Secunde $g=31\frac{1}{4}'$ verlieren und sich folglich gleichmässig verzögernd bewegen. Wird z. B. ein Körper mit $31\frac{1}{4}'$ Geschwindigkeit vertical in die Höhe geworfen, so ist nach einer Secunde seine Geschwindigkeit $=0$, und die erreichte Höhe $=15\frac{5}{8}'$. Wird der Körper mit $125'$ Geschwindigkeit vertical in die Höhe geworfen, so steigt er nur 4 Secunden lang, und erreicht eine Höhe $=250'$. Bezeichnen wir allgemein die Anfangsgeschwindigkeit, mit welcher ein Körper vertical aufsteigt, mit c, seine Endgeschwindigkeit nach t Secunden mit v, und die erreichte Höhe mit h, so hat man für diese gleichförmig verzögerte Bewegung die schon § 219 gefundenen beiden Gleichungen, so wie noch vier andere nach § 223 daraus abgeleitete, nämlich:

$$v=c-gt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$h=ct-\tfrac{1}{2}gt^2 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$t=\frac{c-v}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$t=\frac{c\pm\sqrt{c^2-2gh}}{g} \quad \ldots\ldots (4)$$

$$h=\frac{c^2-v^2}{2g} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$v=\sqrt{c^2-2gh} \ldots\ldots\ldots (6)$$

226.

Aufgabe. Ein Körper wird mit $c=200'$ Geschwindigkeit vertical in die Höhe geworfen. Welche Geschwindigkeit v wird der Körper noch nach 4 Secunden haben, und welche Höhe h hat er nach dieser Zeit erreicht?

Antwort. Man hat nach den Formeln (1) und (2) $v=75'$ und $h=550'$.

227.

Aufgabe 1. Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit $c=200'$ vertical in die Höhe geworfen. Nach wie viel Zeit t wird er noch die Geschwindigkeit $v=10'$ haben, und welche Höhe h hat er bei dieser Endgeschwindigkeit von $v=10'$ erreicht?

Antwort Nach den Formeln (3) und (5) hat man $t=6{,}11''$ und $h=638',4$.

Aufgabe 2. Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit $c=200'$ vertical in die Höhe geworfen. In wie viel Zeit wird er sich in der Höhe $h=400'$ befinden und welche Geschwindigkeit v wird er in dieser Höhe haben?

Antwort. Nach den Formeln (4) und (6) hat man: $t=2'',4$ und auch $t=10'',3$, dann $v=\pm 122',47$. Der Körper befindet sich natürlich zweimal, nach 2,4 und auch nach 10,3 Secunden, in derselben Höhe. Das Minus-Zeichen für $v=\pm 122',47$ deutet auf die entgegengesetzte Bewegung.

Zusatz. Will man die ganze Höhe wissen, welche der mit $c=200'$ Geschwindigkeit aufsteigende Körper überhaupt erreicht, so muss man in Formel (5) $v=0$ setzen und hat dann:

$$h=\frac{c^2}{2g}.$$

228.

Aufgabe. Ein Körper wird vertical in die Höhe geworfen und man zählt $t = 8$ Secunden, bis er auf seinen Ausgangspunct wieder zurückgefallen ist. Welche Höhe hat er erreicht und mit welcher Anfangsgeschwindigkeit c stieg er auf?

Antwort. Da beim Steigen und Fallen die Verzögerung und Beschleunigung gleich sind, so folgt, dass der Körper just so lange steigt als fällt, nämlich 4 Secunden; es ist deshalb (§ 223) die fragliche Höhe $h = 250'$ und $c = 125'$.

Siebzehntes Buch.

Bewegung eines Körpers auf einer schiefen Ebene.

229.

Wir nehmen hier zuerst an, dass ein Körper mit ebener Grundfläche auf einer schiefen Ebene AC (Fig. § 231) ohne Reibung gleitet und alle Puncte desselben sich nach graden parallelen Linien bewegen, mithin weder Drehung noch Wälzung Statt findet. Seien h und l die Höhe und Länge der schiefen Ebene.

So viel mal nun das respective Gewicht des Körpers kleiner ist, als sein absolutes Gewicht, so viel mal ist offenbar auch die stets gleiche Kraft, welche den Körper (von der Reibung abstrahirt) die schiefe Ebene hinuntertreibt, kleiner, als die verticale Schwerkraft und mithin auch (§ 221, Anmerkung) die gleichförmige Beschleunigung auf der schiefen Ebene $=\frac{h}{l}g$ (§ 90). Wenn wir also verläufig von der Reibung abstrahiren, so kommt auch hier die Grösse der Masse selbst nicht in Betracht und wir haben nach den § 217 für alle gleichförmig beschleunigten Bewegungen entwickelten Gesetzen, indem wir die Endgeschwindigkeit nach t Secunden mit v und den in dieser Zeit durchlaufenen Weg mit s bezeichnen, mit Berücksichtigung des Paragraphen 223 folgende sechs Gleichungen zur Beurtheilung aller Umstände, welche die Bewegung eines auf schiefer Ebene gleitenden Körpers betreffen, nämlich:

$$v = \frac{h}{l} g t = g t \sin\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$s = \tfrac{1}{2} \frac{h}{l} g t^2 = \tfrac{1}{2} g t^2 \sin\alpha \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$t = \frac{lv}{gh} = \frac{v}{g \sin\alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$t = \sqrt{\frac{2ls}{gh}} = \sqrt{\frac{2s}{g\sin\alpha}} \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$s = \frac{lv^2}{2gh} = \frac{v^2}{2g\sin\alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$v = \sqrt{\frac{2ghs}{l}} = \sqrt{2gs} \,.\, \sin\alpha \ldots (6)$$

230.

Setzt man in (6) $s = l$, so hat man $v = \sqrt{2gh}$, d. h. am Ende der schiefen Ebene angekommen, hat der Körper ganz dieselbe Geschwindigkeit erlangt, als wenn er durch ihre Höhe, also von A bis B, frei gefallen wäre (§ 223, Formel 5).

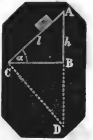
Anmerkung 1. Gehen von A aus mehre schiefe Ebenen bis an die Horizontale BC, so hat ein Körper wegen Formel (4) zwar verschiedene Zeiten nöthig, sie ganz zu durchlaufen, allein, am Ende angekommen, hat er doch immer dieselbe Endgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$.

Anmerkung 2. Steigt ein Körper mit dieser Endgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ vom Ende C aus, die schiefe Ebene wieder hinauf, so ist seine Bewegung offenbar eine gleichförmig verzögerte. Er wird wieder den Ausgangspunct A erreichen, wo seine Geschwindigkeit $= 0$ ist.

231.

Will man die Zeit wissen, in welcher der Körper die ganze Länge der schiefen Ebene durchläuft, so hat man (§ 229, Form. 4), indem man $s = l$ setzt:

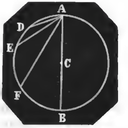
$$t = \sqrt{\frac{2l^2}{gh}}.$$



Suchen wir die Höhe AD, welche der Körper in derselben Zeit, frei fallend, durchlaufen haben würde, so hat man, diesen Werth von t in Formel (2) § 223 substituirt: $AD = \frac{l^2}{h}$, und hieraus: $h : l = l : AD$.

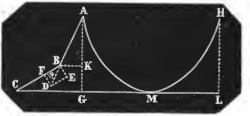
Denkt man sich D mit C verbunden, so muss, wegen dieser Proportion, der Winkel ACD ein rechter sein (Geometrie § 126, Zus. 1).

232.



Aus vorhergehendem, schon von Galilei gefundenen merkwürdigen Satze folgt einfach, dass, wenn man vom obersten Endpunct A eines verticalen Durchmessers AB beliebige Sehnen AD, AE, .. im Kreise zieht, und diese als schiefe Ebenen betrachtet, alle diese schiefen Ebenen von einem Körper in gleichen Zeiten, nämlich in derselben Zeit durchlaufen werden, in welcher der Körper, frei fallend, den verticalen Durchmesser AB durchlaufen würde, weil alle Winkel im Halbkreise rechte sind.

233.



Wird ein Körper, der sich von A aus auf der schiefen Ebene AB bewegt, in B angekommen genöthigt, seine Richtung AD plötzlich um den Winkel α zu ändern und sich auf einer andern schiefen Ebene zu bewegen, so muss er von der in B erlangten Geschwindigkeit einen Theil verlieren. Denn die in B erlangte Geschwindigkeit, welche wir durch BD ($= \sqrt{2g \cdot AK}$) darstellen wollen, zerlegt sich (eben so wie eine Kraft) in BE senkrecht

auf BC (gleichsam ein Stoss der Ebene BC, welcher den Körper von seiner Richtung ablenkt) und in BF längs der Ebene BC.

So viel nun BF kleiner als BD ist, so viel geht an Geschwindigkeit im Punct B verloren*). Der Verlust ist offenbar desto geringer, je kleiner der Winkel α ist. Wäre α unendlich klein, liefe der Körper, statt auf einer gebrochenen schiefen Ebene, auf einer krummen Fläche, in einem verticalen Canal AMH, so würden die Stösse wegfallen und der Körper hätte, in M angelangt, dieselbe Geschwindigkeit, welche er vertical frei fallend in G haben würde

Mit der in M erlangten Geschwindigkeit ($=\sqrt{2g \,.\, AG}$) würde der Körper in dem andern Schenkel bis auf gleiche Höhe $HL = AG$ empor steigen (§ 230, Amkg. 2), und zwar — wenn der Bogen MH dem Bogen MA vollkommen gleich wäre — beide Bögen, sowohl auf- als niedersteigend, in gleicher Zeit durchlaufen. Könnte man von allen Hindernissen abstrahiren, so hätte man ein *perpetuum mobile* und zugleich einen genauen Zeitmesser.

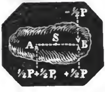
---

*) Ist $BD = v$, also $BF = v \cos \alpha$, so ist durch die Ablenkung in B der Verlust an Geschwindigkeit $= v - v \cos \alpha$.

Achtzehntes Buch.

Wurfbewegung.

236.

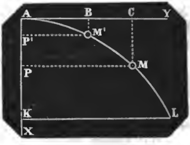


Wenn ein Körper durch eine Stosskraft, d. h. eine nur augenblicklich wirkende sogenannte Momentankraft P, in Bewegung gesetzt wird und die Richtung dieser Kraft nicht durch den Schwerpunct S des Körpers geht, so wird dieser Schwerpunct dennoch dieselbe gradlinigt fortschreitende Bewegung erhalten, als ob die Richtung der Stosskraft durch ihn gegangen, der Körper aber, ausser dieser gradlinigt fortschreitenden Bewegung, noch eine rotirende Bewegung um den Schwerpunct S annehmen. Denn fällt man vom Schwerpunct*) auf die Richtung der Kraft P das Perpendikel SA und verlängert es rückwärts um $SB = SA$, nimmt A als Angriffspunct der Kraft P, die wir in die beiden $\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}P$ zerlegen, und denkt sich noch in B senkrecht auf SB die beiden gleichen entgegengesetzten Kräfte $+\frac{1}{2}P$ und $-\frac{1}{2}P$ angebracht, so ist dadurch nichts geändert. Die eine in A wirkende Kraft $+\frac{1}{2}P$ giebt, mit der in B wirkenden Kraft $+\frac{1}{2}P$ verbunden, eine durch den Schwerpunct S gehende Resultante $= +P$, ausserdem bleibt aber noch ein am Hebelarm AB wirksames

*) Weil dies der einzige Punct ist, in welchem man sich die ganze Masse des Körpers vereint und dann alle übrigen Puncte desselben als massenlos denken kann. § 41.

Kräftenpaar ($\frac{1}{2}$P, — $\frac{1}{2}$P), welches den Körper um den Schwerpunct S dreht. Denn denkt man sich den Schwerpunct augenblicklich festgehalten, so kann man den Körper mit einer Rolle vergleichen. Fällt der Punct B ausserhalb des Körpers, so kann man sich das Kräftenpaar (+ $\frac{1}{2}$P, — $\frac{1}{2}$P) auf ein anderes (+ Q, — Q), von kürzerem, im Körper liegenden Hebelarm reducirt denken (§ 126).

235.



Aufgabe. Es werde ein Körper (eine Kugel) von A aus (z. B. von der Spitze eines Berges) durch einen Stoss, welcher dem Körper eine gewisse Geschwindigkeit *c*, z. B. = 200' einprägt, im leeren Raum nach horizontaler Richtung AY gestossen (geworfen). Gleichzeitig sei der Körper aber auch der beständig und stets mit gleicher Intensität wirkenden Anziehungskraft der Erde unterworfen, welche ihn immer tiefer unter die horizontale Linie AY herunter zieht. Was für eine Bahn AML wird der Körper durchlaufen, wenn wir annehmen, dass der Punct L, wo der Körper aufschlägt und die Bewegung aufhören soll, nur so weit von der Verticalen AX entfernt ist (etwa 1 Meile), dass wir die verticalen Linien BM', CM &c., nach welchen der Körper angezogen wird, unbedenklich als parallel mit AX betrachten können (Geom. § 208).

Auflösung. Da es sich hier nur um die reine Bewegung, nämlich um die Bahn (Fluglinie), welche der mit der Geschwindigkeit *c* ausgerüstete Körper beschreibt, und nicht um seine etwaigen Wirkungen auf andere Körper handelt, so können wir von der Masse desselben abstrahiren, dieselbe als im Schwerpunct concentrirt annehmen und dann auch die etwaige Rotation um diesen Punct ausser Acht lassen (§ 234). Bezeichnen wir den Weg, welchen der Körper in der verticalen Linie AX in t Secunden zurückgelegt haben würde, wenn die Schwerkraft allein gewirkt hätte, mit x, so ist (§ 223, Formel 2): $x = \frac{1}{2} g t^2$.

Hätte dagegen die Stosskraft allein gewirkt, so wurde der willenlose Körper, der die ihm eingedrückte Geschwindigkeit c nicht ändern kann, sich immerfort gleichförmig nach der horizontalen Richtung AY bewegen, so dass, wenn wir den in t Secunden nach dieser Richtung zurückgelegten Weg mit y bezeichnen: $y = ct$.

Obgleich nun beide Kräfte oder die ihnen entsprechenden Geschwindigkeiten, von welcher erstere stets wachsend ist, sich mit einander verbinden, so sieht man doch, dass sie ganz unabhängig von einander sind, weil man die von Punct zu Punct veränderliche Geschwindigkeits-Resultante in jedem Augenblick wieder in ihre Composanten zerlegt denken kann und wo dann immer die eine unveränderliche horizontale Composante $= c$ wieder erscheint.*)

Aus diesem Grunde muss also das Mobil nach einer gegebenen Zeit t sich 1) eben so weit von der Horizontalen AY entfernt haben, als die Schwere allein ihn geführt haben würde und 2) eben so weit von der Verticalen AX entfernt sein, als wenn die Stosskraft allein gewirkt hätte.

Wir können deshalb, vermöge der beiden Gleichungen:

$$x = \tfrac{1}{2} g t^2 \ldots\ldots (1)$$
$$y = ct \ldots\ldots\ldots (2)$$

den Ort M des Mobils nach einer gegebenen Zeit t leicht angeben, indem wir nach (1) die diesem Orte entsprechende Verticale (Abscisse) CM oder $AP = x = \frac{1}{2} g t^2$ und nach (2) die

---

*) Diese Vorstellung wird einfacher, wenn man zuerst annimmt, zwei Momentankräfte hätten den Körper gleichzeitig in Bewegung gesetzt, die eine habe ihm nach der horizontalen Richtung AY die Geschwindigkeit $c = 40'$, die andere nach der verticalen Richtung die Geschwindigkeit $c' = 30'$ eingeprägt. Construirt man dann das sogenannte Geschwindigkeits-Parallelogramm, so stellt die Diagonale die Geschwindigkeit $= \sqrt{c^2 + c'^2} = 50'$ der combinirten gradlinigten und gleichförmigen Bewegung dar, und weil man diese Geschwindigkeit jeden Augenblick wieder in ihre Composanten c, c' zerlegt denken kann, so ist klar, dass diese Composanten ganz unabhängig von einander sind, d. h. ihre Intensitäten nicht im Geringsten stören und dass der Körper deshalb nach einer beliebigen Zeit t eben so weit von den horizontalen und verticalen Linien AY, AX sein muss, als wenn die respectiven Kräfte einzeln gewirkt hätten Eine, in 4' Höhe, nach horizontaler Richtung mit 1800' Geschwindigkeit abgeschossene Kugel muss schon in der Entfernung von 900' aufschlagen und ricochetiren oder liegen bleiben; denn durch die Höhe von 4' fällt die Kugel in 0,''5. (§ 223, Form. 4.)

zugehörige Horizontale (Ordinate) AC oder $MP = y = ct$ berechnen und abstecken.

Will man aber die zu einer gegebenen Abscisse $AP = x$ zugehörige Ordinate $MP = y$ direct berechnen, d. h. ohne erst die Zeit zu suchen, so muss man t eliminiren und erhält dann:

$$y = \sqrt{\frac{2c^2}{g}\,.\,x} \ldots\ldots\ldots (3)$$

Die krumme Fluglinie AML, welche durch Construction dieser Gleichung entspringt, ist eine Parabel, $\frac{2c^2}{g}$ ihr Parameter, in A der Scheitel (höhere Geometrie § 25).

Anmerkung. Die Gleichungen (1), (2), (3) finden näherungsweise für langsame Bewegungen Statt, können aber auf die der Geschützkugel keine Anwendung finden, weil hier wegen der grossen Geschwindigkeiten von 1500 bis 2000′ der Widerstand der Luft zu gross wird und mit in Betracht gezogen werden müsste.

236.

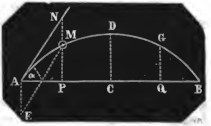
Aufgabe. Von einer Höhe $AK = x' = 10'$ wird aus einem Leitungsrohr ein Wasserstrahl nach horizontaler Richtung AY fortgetrieben. Die Ordinate des Punctes L, wo der Wasserstrahl aufschlägt, ist $KL = y' = 100'$ gemessen. Mit welcher Geschwindigkeit fährt der Wasserstrahl aus dem Leitrohr?

Auflösung. Aus der Gleichung (3) (§ 235) folgt:

$$c = \sqrt{\frac{g y'^2}{2x'}}$$
$$c = 125'.$$

237.

***Aufgabe.** Ein Körper werde von A aus durch eine Stosskraft mit $c = 200'$ Geschwindigkeit nach der unter einem Winkel $\alpha = 30°$ gegen den Horizont geneigten Richtung AN fortgestossen. Man sucht



die Umstände der Bewegung, d. h. die Zeit, nach welcher er das Ende B seiner Bahn erreicht, die horizontale Entfernung des Punctes B von A (die Wurfsweite), die Gestalt der Wurfslinie (Trajectorie) AMB &c. Es wird hierbei vom Widerstande der Luft abstrahirt, auch alle verticalen Linien MP, DC, ... als parallel unter sich angenommen.

Auflösung. Es sei AN der Weg, welchen das Mobil durch die allein wirkende Stosskraft genöthigt in t Secunden zurückgelegt haben würde, so ist $AN = ct$.

Wegen der von der Stosskraft unabhängigen Anziehungskraft der Erde muss sich das Mobil nach t Secunden um die Länge AE oder $NM = \frac{1}{2} g t^2$ vertical unter dem Punct N befinden.

Sind demnach die Coordinaten des Punctes M der Fluglinie, in welchem sich das Mobil nach t Secunden befindet, nämlich $AP = x$ und $MP = y$, so hat man: $x = AN \cdot \cos \alpha$ und $NM + y = AN \cdot \sin \alpha$, oder für AN und NM ihre Werthe gesetzt:

$$x = ct \cdot \cos \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$y = ct \sin \alpha - \tfrac{1}{2} g t^2 \ldots\ldots (2)$$

Sobald in (2) $\frac{1}{2} g t^2$ gleich $ct \sin \alpha$ wird, wird $y = 0$. Das Mobil hat, in B angekommen, seine Bahn durchlaufen. Bezeichnen wir die dazu erforderliche Zeit mit $t_{,}$, so folgt aus $\frac{1}{2} g t_{,}^2 = c t_{,} \sin \alpha$, dass:

$$t_{,} = \frac{2 c \sin \alpha}{g} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Setzt man diesen Werth von $t_{,}$, statt t, in (1) und bezeichnet die fragliche Wurfsweite AB mit w, so hat man: $w = \frac{2 c^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g}$ oder (Trigonometrie § 100, 16):

$$w = \frac{c^2 . \sin 2\alpha}{g} \ldots\ldots\ldots (4)$$

1) Diese Formel lehrt, dass man die grösste Wurfsweite erhält (dass w ein Maximum wird), wenn man den Richtungswinkel $\alpha = 45^0$ nimmt, denn für diesen Werth von α wird der Factor $\sin 2\alpha = \sin 90 = 1$ am grössten und für diesen Richtungswinkel von 45^0 die Wurfsweite $w = \frac{c^2}{g}$ also mal so gross, als die Höhe, auf welche das Mobil mit derselben Anfangsgeschwindigkeit c vertical steigen würde (§ 227, Zus.).

2) Die Formel (4) lehrt ferner, dass, wenn man den Richtungswinkel von 45° um gleich viel grösser oder kleiner nimmt, der Körper in beiden Fällen gleich weit fliegt, weil $\sin 2(45+m)=\sin 2(45-m)$ oder $\sin(90+2m)=\sin(90-2m)$.

3) Kennt man den Winkel α und die erreichte Wurfsweite w, so hat man aus (4):

$$c=\sqrt{\frac{gw}{\sin 2\alpha}} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

4) Um die Beziehung zwischen den Coordinaten x, y eines Punctes M der Wurfslinie, d. h. die Gleichung für dieselbe zu erhalten, substituire man den Werth von t aus (1) in (2), so hat man:

$$y=\operatorname{tg}\alpha \,.\, x-\frac{gx^2}{2c^2\cos^2\alpha} \ldots\ldots (6)$$

Diese Gleichung giebt zu erkennen, dass die Wurfslinie eine Parabel ist (höhere Geom. § 89). Um ihre gewöhnliche einfachere Gleichung aus obiger abzuleiten, verlege man erst den Anfangspunct A der Coordinaten nach der Mitte C der Wurfsweite AB, setze die von C aus gerechnete neue Abscisse $CQ=\mathrm{x}$, weil nun, vermöge der Formel (4), $AC=\frac{c^2\sin 2\alpha}{2g}$, also $x=\frac{c^2\sin 2\alpha}{2g}+\mathrm{x}$ (höhere Geom. § 68), so hat man diesen Werth von x in (6) substituirt und gehörig reducirt:

$$y=\frac{g}{2c^2\cos^2\alpha}\cdot\left(\frac{c^4\sin^2 2\alpha}{4g^2}-\mathrm{x}^2\right)\ldots (7)$$

Aus dieser Gleichung erhellet, dass man für gleiche und entgegengesetzte Werthe von x, $CP=-CQ$ gleiche Ordinaten $MP=GQ$, und für $\mathrm{x}=0$ die grösste Ordinate DC erhält. Bezeichnen wir diese mit h, so ist, weil $\sin^2 2\alpha=2^2 \sin^2\alpha \,.\, \cos^2\alpha$:

$$h=\frac{c^2\sin^2\alpha}{2g} \ldots\ldots\ldots (8)$$

Die Wurfslinie (im leeren Raum) besteht also aus zwei congruenten Bögen $\widehat{AD}=\widehat{BD}$ und das Mobil erreicht gerade über der Mitte C der Wurfslinie seine in (8) angegebene grösste Höhe.

Verlegen wir nochmals den Ursprung der Coordinaten von

C nach D, indem wir in (7) $y = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2g} + \mathrm{y}$ setzen (höhere Geom. § 68), so ist: $\mathrm{y} = -\frac{g}{2c^2 \cos^2 \alpha} \mathrm{x}^2$ und, indem wir x als die abhängig veränderliche Grösse betrachten:

$$\mathrm{x} = \pm \sqrt{-\frac{2c^2 \cos^2 \alpha}{g} . \mathrm{y}} \ldots (9)$$

Dies ist die gewöhnliche Gleichung der Parabel, deren Scheitel in D, und deren Parameter $= \frac{2c^2 \cos^2 \alpha}{g}$. Man sieht, dass nur für negative Werthe von y gleiche entgegengesetzte Werthe für x kommen.

Will man endlich noch den Richtungswinkel α wissen, unter welchem das Mobil geworfen werden muss, um einen bestimmten Punct zu treffen, dessen Coordinaten x', y' gegeben sind, so braucht man nur diese Werthe statt x, y in die Gleichung (6) zu substituiren und dieselbe auf tg α zu reduciren. Aus:

$$y' = \operatorname{tg} \alpha . x' - \frac{g x'^2}{2c^2 . \cos^2 \alpha}$$

folgt, wenn man $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$ statt $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$ setzt (Trig. § 100, 7):

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{2c^2}{g x'} . \operatorname{tg} \alpha = -1 - \frac{2c^2 y'}{g x'^2} \text{ und hieraus:}$$

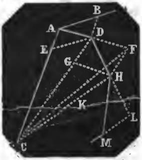
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c^2 \pm \sqrt{c^2(c^2 - 2gy') - g^2 x'^2}}{g x'} \ldots (10)$$

Ist die Grösse unter dem Wurzelzeichen positiv, so erhält man für α zwei verschiedene Werthe.

Neunzehntes Buch.

Centrifugalkraft.

238.



Ein Mobil A werde durch eine Momentankraft nach der Richtung AB gestossen, gleichzeitig aber von einer stetig wirkenden Anziehungskraft, die ihren Sitz in C hat, beständig nach diesem Punct C hingezogen. Die hiedurch entstehende Bewegung des Mobils A heisst Centralbewegung, die beständig nach dem Centro C wirkende Anziehungskraft Centripetalkraft, und jede vom Centro C nach irgend einem Orte des Schwerpuncts des sich bewegenden Körpers*) gehende Linie Leitstrahl (*radius vector*).

Um hier die Umstände der Bewegung zu finden, nehme man zuerst an, dass die Centripetalkraft, anstatt stetig, ruckweise wirke. Es stelle AB die Geschwindigkeit dar, welche die nur einmal wirksame Stosskraft dem Mobil A einprägt und ebenso AE die Geschwindigkeit, welche die Centripetal-

*) Obgleich es sich von selbst versteht, dass man sich, bei der hier entstehenden Bewegung, die Masse des Körpers in seinem Schwerpunct concentrirt denken muss, so soll dies doch, eines etwa entstehenden Zweifels halber, in § 244 noch besonders bewiesen werden. Bis dahin nehmen wir den Schwerpunct als denjenigen, auf welchen nur die Kräfte wirken.

kraft durch den ersten Ruck dem Mobil A nach der Richtung des Leitstrahls CA ertheilt, alsdann würde der Körper in der 1sten Secunde die Diagonale AD des Parallelogramms EB durchlaufen und, wenn die Centripetalkraft nicht ferner auf ihn wirkte, diese Bewegung in der durch den Winkel CAB bestimmten Ebene gradlinigt und gleichförmig fortsetzen und in der 2ten Secunde den Weg DF = AD beschreiben. Wirkt nun aber die Centripetalkraft mit Anfang der 2ten Secunde wieder durch einen Ruck auf den jetzt in D befindlichen Körper nach der Richtung des Leitstrahls CD und ertheilt ihm die ganz beliebige Geschwindigkeit DG, so durchliefe der Körper in der 2ten die Diagonale DH &c.

239.

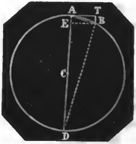
Zuerst ist hier klar, dass bei dieser fingirten ruckweisen Wirkung der Centripetalkraft das Mobil A eine gebrochene Linie ADHM... beschreiben würde, die ganz in einer Ebene liegt; zweitens aber, was sehr merkwürdig ist, die von einem Leitstrahl (wie seine Länge sich auch ändern möge) in gleichen Zeiten beschriebenen Flächenräume sind gleich gross, oder was dasselbe sagt: die von einem Leitstrahl beschriebene Fläche wächst der Zeit genau proportional, nach welchem Gesetze die Centripetalkraft auch wirken möge; denn, in der 1sten Secunde hat der Leitstrahl CA, bei der ruckweisen Wirkung derselben, die Fläche des Dreiecks CAD, in der 2ten Secunde die des Dreiecks CDH beschrieben &c. Denkt man sich die Linie CF gezogen, so sind die beiden Dreiecke CAD und CDF inhaltsgleich, wegen gleicher Grundlinie DF = AD und wegen gemeinschaftlicher Höhe (nämlich das von C auf die Grundlinie oder auf ihre Verlängerung gefällte Perpendikel). Nun sind aber auch die beiden Dreiecke CDH und CDF inhaltsgleich, weil ihre Spitzen H und F in derselben mit der gemeinschaftlichen Grundlinie CD Parallelen FH liegen. Es ist mithin auch $\triangle CDH = \triangle CAD$. Eben so zeigt man, dass $\triangle CHM = \triangle CDH$ &c.

Dieselben Schlüsse finden offenbar Statt, wenn wir die gleichen Zeittheilchen, in deren Anfang die Centripetalkraft ruckweise wirkt, immer kleiner und kleiner und folglich auch unendlich klein denken und die ruckweise wirkende Anziehungskraft stetig wirkt. Alsdann muss aber das Mobil, statt eine

gebrochene Linie, eine ebene krumme Linie beschreiben, dabei aber das eben bewiesene (auch bei allen Centralbewegungen der Himmelskörper Statt findende) unvermeidliche und unerschaffene fatalistische Naturgesetz gleichfalls obwalten: dass der Leitstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschreibt.

Anmerkung. Von dem Gesetze, nach welchem die Anziehungskraft wirkt, hängt es aber ab, was für eine Art krumme Linie (ob Kreis, Ellipse, Parabel &c.) beschrieben wird. Nimmt die Anziehungskraft nach den Quadraten der Entfernungen des angezogenen Punctes, vom Centro, ab, so lässt sich durch Infinitesimalrechnung zeigen, dass dann nur ein Kegelschnitt und keine andere krumme Linie entstehen kann, und dass umgekehrt, wenn ein Kegelschnitt entstehen soll, in dessen Brennpunct die Anziehungskraft ihren Sitz hat, die Intensität derselben nothwendig dem Quadrate der erwähnten Entfernung umgekehrt proportional sein muss.

240.



Von den möglichen Centralbewegungen betrachten wir hier nur den für die Theorie und Praxis sehr wichtigen speciellen Fall, wo ein Körper (sein Schwerpunct) genöthigt ist, sich mit einer gegebenen Geschwindigkeit c in einem Kreise, dessen Radius $= r$ ist, zu bewegen, und damit er dies thut,*) soll eine im Mittelpunct C stetig und mit immer gleicher Intensität wirkende Centripetalkraft ihn jeden Augenblick um das erforderliche Stück von der Tangente AT, nach welcher er sonst mit derselben Geschwindigkeit c fortgehen würde, ablenken. Man fragt, wie gross die offenbar durch den Radius r und die Geschwindigkeit c bestimmte Centripetalkraft sein muss?

Da diese Kraft immer mit derselben Intensität wirken soll, so müsste sie offenbar, wenn sie ganz allein wirksam wäre, eine gleichförmig beschleunigte Bewegung hervorbringen. Könnten wir die ihr entsprechende Beschleunigung, die wir mit k bezeichnen wollen, angeben, so gäbe uns dies k zugleich ein Maass für ihre Grösse.

*) Die Richtung eines sich in krummer Linie bewegenden Körpers ist in jedem Punct die daselbst gedachte Tangente, von welcher er, wenn nicht eine Ursache ihn dazu nöthigt, von selbst nicht abweichen kann.

Vermöge der durch die einmal wirkende Stosskraft (Tangentialkraft) dem Körper A eingedrückten Geschwindigkeit c, mit welcher er sich im Kreise bewegen soll, würde er, wenn die Centripetalkraft nicht vorhanden wäre, nach der Richtung der Tangente in der Zeit t den Weg

$$AT = ct \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

zurücklegen. Man ziehe TB ∥ AC und BE ∥ AT. Wirkte nun die Anziehungskraft stets parallel mit AC und wäre die fragliche Beschleunigung k so gross, dass diese Kraft, allein wirkend, den Körper A in derselben Zeit t durch den Raum

$$AE = \tfrac{1}{2} k t^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

geführt hätte, so würde der Körper sich wirklich im Punct B des Kreises befinden (§ 235, Rdmkg.), und man hätte dann, indem man die Sehnen AB, BD gezogen denkt (Geometrie § 126, Zusatz 1), $AF : AB = AB : 2r$, woraus $\overline{AB}^2 = 2r . AE$, oder für AE seinen Werth aus (2) substituirt:

$$\overline{AB}^2 = rkt^2 \ldots\ldots\ldots (3)$$

Die hier gemachte Annahme, dass die Anziehungskraft während einer messbaren Zeit t parallel mit AC gewirkt habe, ist allerdings nicht gestattet, weil diese Kraft ja stets nach dem Centro gerichtet sein muss, um den Körper, damit er im Kreise bleibt und also während keiner messbaren Zeit nach der Tangente fortgehen darf, jeden Augenblick von der Richtung der Tangente abzulenken. Man sieht aber, dass jene Annahme der Wahrheit desto näher kommt, je kleiner die Zeit t ist, und dass wir, um die Wahrheit ganz zu erreichen, wo nämlich die Centripetalkraft noch wirklich nach AC gerichtet, was nur während eines Augenblicks sein kann, in den Gleichungen (1) und (2) die Zeit t unendlich (verschwindend) klein nehmen müssen, dann aber fallen Tangente, Sehne und Bogen zusammen ($AT = \widehat{AB} = AB$) und wir dürfen alsdann in der noch immer gültigen Gleichung (3) $\overline{AT}^2$ statt $\overline{AB}^2$ setzen und haben dann, weil $\overline{AT}^2 = c^2 t^2$ ist: $c^2 t^2 = rkt^2$ und hieraus:

$$k = \frac{c^2}{r} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Soll sich z. B. ein Körper mit der Geschwindigkeit $c = 25'$ in einem Kreise bewegen, dessen Radius $r = 10'$ ist, so müsste

die Centripetalkraft, die ihn in diesem Kreise erhält, so gross sein, dass sie, allein wirkend, dem Körper eine Beschleunigung von $k = 62\frac{1}{2}'$ ertheilt. Sie müsste also just mal so gross sein, als die Anziehnngskraft der Erde, weil deren Beschleunigung ja nur $g = 31\frac{1}{4}'$ ist.

241.

Damit sich also ein Körper in einem Kreise, dessen Radius $= r$, mit einer Geschwindigkeit $= c$ bewege, muss eine Centripetalkraft vorhanden sein, die ihn stetig von der Tangente ablenkt und so gross sein, dass sie, allein wirkend, eine Beschleunigung $k = \frac{c^2}{r}$ hervorbrächte, weil der Körper sich sonst, der augenblicklichen Richtung der Tangente folgend, vom Mittelpunct des Kreises entfernen würde und zwar mit einer Kraft, welche man Centrifugal-, Flieh- oder Schwung-Kraft nennt. Da nun diese Centrifugalkraft es ist, welche durch die Centripetalkraft compensirt werden muss, so leuchtet ein, dass beide gleich gross sind und dass also die Centrifugalkraft, wenn sie allein wirksam wäre, auch dieselbe Beschleunigung $k = \frac{c^2}{r}$ nur nach entgegengesetzter Richtung hervorbringen würde.

Anmerkung. Die hier kurz angeregte Theorie der Centralbewegung, durch deren völlige Ausbildung Newton sich seine Unsterblichkeit erwarb und Gründer der physischen Astronomie oder, wie Laplace sie nennt, der Mechanik des Himmels (mécanique céleste) wurde, indem sie in der That nur ein grosses Problem der rationellen Mechanik ist, ist in neuerer Zeit vielfach in der Technik benutzt worden.

242.

So lange wir nur die reine Centralbewegung eines Körpers an sich betrachten, kommt offenbar, eben so wie beim Fall eines Körpers, seine Masse gar nicht in Betracht. Wird aber nach der Wirkung gefragt, welche er vermöge seiner Centrifugalkraft auf andere Körper ausübt (z. B. der Druck, welchen er auf die Wände eines Canals, in welchem er läuft, verursacht, die Kraft, mit welcher er ein Seil spannt, an welches

er befestigt wäre &c.), dann ist allemal die Masse des sich bewegenden Körpers zu berücksichtigen, wie wir schon im folgenden Paragraphen sehen werden, der noch ein anderes Maass, als die Beschleunigung, für die Centrifugalkraft geben wird.

243.

Aufgabe. Es sei AC (Figur § 240) eine in C befestigte massenlos gedachte Stange oder Schnur, an deren Ende A eine Masse $M = 20$ ℔ befestigt ist. Durch einen Stoss werde diese Masse genöthigt, sich mit einer constanten Geschwindigkeit von $c = 25'$ in dem mit $AC = r = 10'$ beschriebenen und in horizontaler Ebene liegenden Kreise zu drehen Dann wird offenbar die Schnur durch die entstehende Centrifugalkraft gespannt werden. Man fragt, wie gross diese Spannung, in Gewicht ausgedrückt und von der Reibung auf der horizontalen Ebene abstrahirt, sein wird.

Antwort. Hinge die Masse an einem verticalen Faden, so betrüge die Spannung $M = 20$ ℔. Schnitte man den Faden durch, so würde die Masse, durch die Anziehungskraft der Erde genöthigt, vertical fallen und zwar mit einer Beschleunigung von $g = 31\frac{1}{4}'$. So viel mal nun die berechnete Beschleunigung der Centrifugalkraft, nämlich $k = \frac{c^2}{r}$, grösser oder kleiner ist, als $g = 31\frac{1}{4}'$, so viel mal muss offenbar auch die Spannung des Fadens nach horizontaler Richtung grösser oder kleiner sein, als nach verticaler Richtung (§ 221, Anmerkung). Bezeichnen wir also diese fragliche, in Gewicht ausgedrückte Spannung, d. h. die Grösse der Centrifugal- oder Fliehkraft mit F, so ist: $g : k = M : F$ oder für k seinen Werth gesetzt: $g : \frac{c^2}{r} = M : F$ und hieraus die für die Technik sehr wichtige Formel:

$$F = \frac{c^2}{rg} . M.$$

Für das angenommene Zahlenbeispiel würde die Schnur eine Spannung von $F = 40$ ℔ auszuhalten haben.

Anmerkung 1. Schwingt die Masse statt in einem horizontalen in einem verticalen Kreise, so ist in dessen höchstem Punct die Spannung des Fadens, wegen der Anziehungskraft

der Erde offenbar $= 40 - 20 = 20$ ℔, im untersten Punct $= 40 + 20 = 60$ ℔; in den beiden mittlern $= 40$ ℔.

Anmerkung 2. Die Centrifugalkraft ist nach vorstehender Formel direct der Masse und dem Quadrate der Geschwindigkeit und umgekehrt dem Radius proportional. Je kleiner, bei derselben Geschwindigkeit, der Radius r ist, je stärker ist die Krümmung und deshalb muss die Ablenkung von der Tangente grösser sein, als bei schwachen Krümmungen.

244.

Wir haben bei der Bestimmung der Centrifugalkraft F die Annahme gemacht: die ganze Masse M des rotirenden Körpers sei im Schwerpunct vereint und wollen nun zeigen, dass diese Annahme immer zulässig ist.

1) Die materiellen Puncte, deren Massen $m', m'', m''', \ldots$ und deren Abstände vom Drehpunct C beziehlich $r', r'', r''' \ldots$ sind, sollen zuerst alle in einer geraden Linie (einer dünnen Stange) liegen, die sich um ihren Endpunct C dreht. Bezeichnen wir die Geschwindigkeit des um die Längen-Einheit vom Drehpunct entfernten Punctes, d. h. die rectificirte Länge des von ihm in einer Secunde gleichförmig beschriebenen Bogens, welche man die Winkelgeschwindigkeit der sich drehenden Linie nennt, und welche mehrere Umläufe betragen kann, mit w, so sind offenbar die verschiedenen Geschwindigkeiten der Puncte $m', m'', \ldots$ beziehlich $r'w, r''w, \ldots$ und man hat für die einzelnen Centrifugalkräfte $f', f'', \ldots$ dieser Massenpuncte, nach vorhergehender Formel: $f' = \frac{(r'w)^2}{r'g} m'$, $f'' = \frac{(r''w)^2}{r''g} m''$, ... mithin für die Resultante F aller dieser einerlei Sinns wirkenden Centrifugalkräfte:

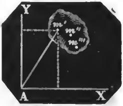
$$\mathrm{F} = \frac{r'^2 w^2}{r'g} m' + \frac{r''^2 w^2}{r''g} m'' + \frac{r'''^2 w^2}{r'''g} m''' + \ldots \quad (1)$$

$$\mathrm{F} = \frac{w^2}{g} (m'r' + m''r'' + m'''r''' + \ldots.) \ldots. (2)$$

Ist nun die Summe aller Massenpuncte $m' + m'' + m''' + \ldots = \mathrm{M}$ und die Entfernung ihres Schwerpuncts vom Drehpunct $= r$, so sieht man, dass der eingeklammerte Factor $= \mathrm{M}r$ ist (§ 129). Wir haben also $\mathrm{F} = \frac{w^2}{g} . \mathrm{M}r = \frac{r^2 w^2}{rg} . \mathrm{M}$ oder,

indem wir die Geschwindigkeit des Schwerpuncts, welche offenbar $= rw$ ist, wieder mit c bezeichnen:

$$F = \frac{c^2}{rg} . M.$$



2) Liegen die materiellen Puncte m', m'', ... alle in einer durch den Drehpunct A gehenden Ebene (einer dünnen Scheibe), so zerlege man jede einzelne Centrifugal-Kraft $f' = \frac{(r'w)^2}{r'g} m'$; $f'' = \frac{(r''w)^2}{r''g} m''$, ... in zwei auf einander senkrechte Composanten, nach den Achsen AX, AY, indem man jede Centrifugalkraft mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt, welchen der Leitstrahl $A m' = r'$, $A m'' = r''$, ... mit den Achsen macht. Sind x', y'; x'', y''; ... die Coordinaten der Massenpuncte m', m'', ... so sind offenbar $\frac{x'}{r'}$, $\frac{y'}{r'}$; $\frac{x''}{r''}$, $\frac{y''}{r''}$; ... die Cosinus dieser Winkel. Bezeichnen wir nun die Summe der mit Ax parallel wirkenden Composanten mit X und die Summe der mit Ay parallel wirkenden mit Y, so erhält man:

$$X = \frac{w^2}{g} (m'x' + m''x'' + m'''x''' + \dots)$$

$$Y = \frac{w^2}{g} (m'y' + m''y'' + m'''y''' + \dots)$$

Zufolge § 132 sind aber die eingeklammerten Factoren gleich den Producten aus der Summe M aller Massenpuncte (Gewichte) in die Coordinaten x, y ihres Schwerpunctes, so dass wir obige Gleichungen auch so schreiben können:

$$X = \frac{w^2}{g} . M x$$

$$Y = \frac{w^2}{g} . M y$$

Die Resultante F aus den beiden Composanten X, Y ist:

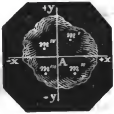
$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{w^2}{g} M \sqrt{x^2 + y^2}$$

Der Factor $\sqrt{(x^2 + y^2)}$ ist aber gleich der Entfernung des Schwerpuncts s vom Drehpunct A. Bezeichnen wir diese Ent-

fernung mit r, so ist auch, indem wir die Geschwindigkeit des Schwerpuncts $rw = c$ setzen:

$$F = \frac{w^2 M r}{g} = \frac{(rw)^2}{rg} M = \frac{c^2}{rg} . M$$

3) Liegt der Drehpunct A zwischen den materiellen Puncten m', m'', ... so bleiben alle vorhergehenden Schlüsse dieselben. Die Cosinus der Winkel, welche die Leitstrahlen (in der kürzesten Drehung) mit den positiven Seiten der Achsen machen (höhere Geometrie § 3, Amkg.), sind dann für die Achse AX im 2ten und 3ten und für die Achse AY im 3ten und 4ten Quadranten alle negativ. Dadurch kann dann aber der Fall eintreten, dass die Composante $X = 0$ und zugleich auch $Y = 0$, mithin auch $F = 0$ wird, und folglich der Drehpunct A gar keinen Druck auszuhalten hat, weil sich in diesem Falle immer zwei gleiche entgegengesetzte Fliehkräfte tilgen.



4) Hat man endlich einen Körper, der sich um eine feste Achse AB dreht, und denkt man sich denselben durch senkrecht auf die Achse gerichtete Ebenen durchschnitten, so kann man sich die Fliehkräfte aller Puncte eines solchen Schnitts als im Schwerpunct s desselben vereint denken und das von ihm auf die Achse gefällte Perpendikel sc als Leitstrahl und c als Drehpunct ansehen.



Sind also m', m'', ... die Massen dieser Schnitte und r', r'', ... die Entfernungen ihrer Schwerpuncte von der Achse, so sind die einzelnen Fliehkräfte dieser unendlich dünnen Schichten: $f' = \frac{(r'w)^2}{r'g} m'$, $f'' = \frac{(r''w)^2}{r''g} m''$, ... Wären alle diese senkrecht auf die Achse gerichteten Kräfte parallel, so lägen die Schwerpuncte dieser Schichten alle in einer und derselben längs durch die Achse und den Körper gelegten Ebene, und ihre Resultante F wäre gleich der Summe aller, die man dann, was ihre Grösse betrifft, als im Schwerpunct des Körpers ihren Sitz habend annehmen kann, so dass, wenn

M die Masse des Körpers, r die Entfernung eines Schwerpuncts von der Achse und $v = rw$ die Geschwindigkeit des Schwerpuncts ist, wiederum:

$$F = \frac{w^2}{g}(m'r' + m''r'' + \ldots) = \frac{w^2 M r}{g} = \frac{r^2 w^2 M}{rg}$$

$$F = \frac{c^2}{rg}.M.$$

Wären die Fliehkräfte f', f'', ... nicht parallel, so kann man, durch Hülfe der Kräftenpaare, alle parallel mit sich selbst nach einem und demselben Angriffspunct c der Achse versetzen. Es sei c der Fusspunct des vom Schwerpunct des Körpers auf die Achse gefällten Perpendikels. Lässt man nun in c zwei der Kraft f' parallele, ihr gleiche und entgegengesetzte Kräfte $(+f', -f')$ wirken, so ist dadurch nichts geändert. Verfährt man eben so mit den Kräften f'', f''', ... so wirken die Kräfte $+f'$, $+f''$, ... alle in einer und derselben in c senkrecht durch die Achse gehenden Ebene und, indem man c als Drehpunkt betrachtet, hat man für die Resultante F der in dieser Ebene wirkenden Fliehkräfte ganz wie in 2):

$$F = \frac{c^2}{rg}.M.$$

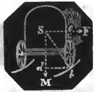
Die noch restirenden Kräftenpaare sind nicht bestrebt, den Schwerpunct des Körpers von der Achse zu entfernen, sind also keine Fliehkräfte, und nur bestrebt, den Körper oder die Achse, woran er befestigt ist, zu drehen. Man kann übrigens jedes Kräftenpaar $(f', -f')$, $(f'', -f'')$, ... auf einerlei Hebelarm, z. B. AB, reducirt und dann in jedem der Puncte A und B die Resultanten von f', f'', ... und $-f'$, $-f''$, ... substituirt denken. Es bleibt dann entweder noch ein Kräftenpaar übrig, welches den Körper dreht, oder, wenn derselbe unveränderlich mit der Achse verbunden ist, durch die festen Stützpuncte A und B vernichtet wird (dies giebt sich durch die Unruhe [Zittern] des rotirenden Körpers zu erkennen), oder die erwähnten Resultanten sind jede $= 0$. Letzteres ist z. B. der Fall bei einem rotirenden Cylinder, Ellipsoid, Kugel, Prisma &c., wenn ihre Masse durchgehends gleich dicht und ihre geom. Achsen mit der Drehachse AB parallel sind.

Drehen sich endlich diese Körper, so wie auch ein Kegel,

Paraboloid &c., um ihre eigenen Achsen, so tilgen sie je zwei gleiche entgegengesetzte Fliehkräfte und die Rotationsachse erleidet davon gar keinen Druck, und ist dann eine sogenannte freie Achse.

245.

Allemal, wo ein Körper sich in einer beliebigen krummen Linie bewegt, findet auch immer eine Centrifugalkraft Statt, die ihren Sitz im Schwerpunct des Körpers hat, und ihn in jedem Punct der verschiedenen Krümmungen vom Endpunct des Krümmungshalbmessers zu entfernen bestrebt ist, z. B. bei der Bewegung des Schleuders, wo sie die Schnur spannt, beim Mühlstein, wo sie das Korn von der Achse nach dem Rande hin treibt, beim Schleifstein, Wagenrad, bei der englischen Centrifugalrutschbahn. Ein offenes Gefäss mit Wasser lässt sich bei hinreichender Geschwindigkeit in einem verticalen Kreise schwingen &c. Auch sind bereits schon nützliche Anwendungen von dieser Kraft gemacht worden, z. B. Maschinen zum schnellern Trocknen der Wäsche, in Zuckerfabriken, wo man durch die Centrifugalkraft in ein paar Minuten den Syrup vom Zucker trennt, was früher Wochen erforderte.



Fährt eine Locomotive in einem Bogen, dessen Krümmungshalbmesser $= r$, mit einer Geschwindigkeit $= c$ und ist M ihr Gewicht und S ihr Schwerpunct, so lässt sich leicht beurtheilen, ob die Locomotive stabil ist oder nicht. Das Gewicht M der Locomotive und die Centrifugalkraft $F = \frac{c^2}{rg}$. M wirken in einerlei Verticalebene, welche die äusserste Schiene in einem Punct b schneidet. Denkt man sich von diesem Stützpunct b auf die Richtungen beider Kräfte die Perpendikel bd, be gefällt, so hat man einen um b drehbaren Winkelhebel. Sind die statischen Momente einander gleich, $\frac{c^2}{rg} M . be = M . bd$, oder $c^2 = \frac{bd}{be} . rg$, so findet Labilität Statt, Stabilität dagegen, wenn $c^2 < \frac{bd}{be} . rg$. Liegt die äussere Schiene höher, als die innere, so wird der Hebelarm bd und dadurch die Stabilität vergrössert. Fährt ein Wagen sehr

rasch um eine Ecke, so kann der Wagen umfallen, oder unachtsame Personen können hinausfliegen. Reitet oder läuft einer in der Volte, so muss er sich ein wenig nach innen neigen u. dgl. m.

246.

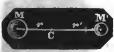
Bewegt sich ein Körper mit gleichmässiger Geschwindigkeit im Kreise, dessen Radius $=r$ ist, und macht er in T Secunden einen ganzen Umlauf, so ist seine Geschwindigkeit $c=\frac{2r\pi}{T}$, und folglich das Maass seiner Centrifugalkraft, durch die Beschleunigung k ausgedrückt [§ 240, (4)]:

$$k=\frac{4r\pi^2}{T^2}\ldots\ldots\ldots(1)$$

und wenn seine Masse M berücksichtigt wird, durch Gewicht ausgedrückt (§ 243):

$$F=\frac{4r\pi^2}{gT^2}.M\ldots\ldots(2)$$

247.



Aufgabe. An den Enden einer gewichtslos gedachten, um die Achse C sich drehenden Stange befinden sich die Massen M, M'. Wie müssen sich diese in Bezug auf ihre Entfernungen r, r' von der Achse verhalten, damit diese durch die entgegengesetzten Centrifugalkräfte keinen Druck erleidet (eine freie Achse wird)?

Auflösung. Da die Umdrehungszeit für beide Enden dieselbe ist und die Centrifugalkräfte gleich sein müssen, so hat man:

$$\frac{4r\pi^2}{gT^2}.M=\frac{4r'\pi^2}{gT^2}.M', \text{ hieraus:}$$

$$Mr=M'r'$$

$$M:M'=r':r \text{ (vergl. § 61).}$$

248.

Aufgabe. Wie gross ist, durch die Beschleunigung k ausgedrückt, die der Schwerkraft entgegenwirkende Centrifugalkraft auf dem Erd-Aequator, dessen Radius $r = 20284115'$ rhl.?

Auflösung. Man hat hier, da $T = 86164$ Secunden (Sterntag), § 246, (1):

$$k = 0{,}10786'.$$

Auf dem Aequator ist die Beschleunigung $g = 31{,}149$ (§ 221).

Vergleicht man beide Zahlen mit einander, so ergiebt sich, dass die Centrifugalkraft unterm Aequator nahe der 289ste Theil der Schwerkraft ist, und diese also und mithin auch das Gewicht der Körper um den ebensovielten Theil verringert. Ein Körper, der auf dem Aequator (an einer Federwaage) 288 ℔ zeigt, würde 289 ℔ Gewicht haben, wenn die Erde sich nicht drehte.*)

249.

Aufgabe. In wie viel Zeit müsste die Erde sich um ihre Achse drehen, damit die Centrifugalkraft k unterm Aequator der Anziehungskraft daselbst gleich würde?

Antwort. Setzt man in (1) § 246, $g = 31{,}149$ statt k, so hat man:

$$T = \sqrt{\frac{4 r \pi^2}{g}} = 5062''.$$

Dies ist nahe der 17te Theil von ihrer wirklichen Umdrehungszeit. Wenn also die Erde sich 17mal schneller (in $1\frac{7}{17}$ Stunde Sternzeit) umdrehte, so würden alle Körper (Massen) unterm Aequator gar kein Gewicht haben, und alles, was daselbst geht und nicht befestigt steht, nach der Tangente

*) Ist r der Radius des Aequators, so hat man für den Radius r' eines in der Breite $= b$ liegenden Parallelkreises: $r' = r \cos b$ (Trig. § 40 d). Da nun die Umdrehungszeit für beide dieselbe ist und die Centrifugalkräfte k, k' sich wie die Radien r, r' verhalten [§ 246, (1)], so hat man $k : k' = r : r \cos b$, woraus: $k' = k \cos b$. Zerlegt man diese Fliehkraft $k \cos b$ in eine verticale und eine tangentiale, so wird die Beschleunigung in der Breite b um $k \cos^2 b$ verringert.

davon fliegen. Liesse sich ein Körper auf dem Aequator mit der Geschwindigkeit $=\sqrt{gr} = 17 . 1432 = 24344$ par. Fuss nach tangentialer Richtung fortschleudern, so würde er nie wieder zur Erde kommen, sondern wie der Mond um sie kreisen.

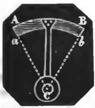
250.

Aufgabe. Eine Stange von $r = 4'$ Länge, die ein Gewicht von $P = 3200$ ℔. tragen kann, bevor sie abreisst, dreht sich um das eine Ende in einem horizontalen Kreise. Am andern Ende ist eine Masse von $M = 20$ ℔. befestigt. Wie viele Umdrehungen (n) kann diese Stange in der Secunde machen, bevor sie durch die Centrifugalkraft abgerissen wird?

Antwort. Sei die fragliche Anzahl der Umdrehungen $= n$, so ist der in einer Secunde von der Masse M durchlaufene Raum, d. h. ihre Geschwindigkeit, $c = 2 r \pi n$, mithin ihre Centrifugalkraft $F = \frac{(2 r \pi n)^2}{r g} . M$ (§ 243), und da diese nicht grösser als $P = 3200$ ℔. werden darf, so hat man:

$$n = \sqrt{\frac{g P}{4 r \pi^2 M}} = 5{,}6 \ldots$$

251.



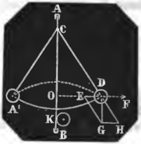
Aufgabe. Das auf eine Speiche kommende Stück eines Schwungrades habe ein Gewicht von $M = 1000$ ℔. Mit welcher Kraft F sucht es sich, bei $n = 3$ Umdrehungen in der Secunde, von der Achse C zu entfernen, wenn die Radien $CA = R = 6'$, $Ca = r = 5'$, die Sehne $AB = c = 6'$ und von dem Gewicht der Speiche und von der Verbindung mit den rechts und links daran stossenden Felgen abstrahirt wird?

Auflösung. Zufolge § 137 ist der zum Schwerpunct führende Leitstrahl $r' = 5\tfrac{32}{121}'$, die Geschwindigkeit des Schwerpuncts $c = 2 r' \pi . n$. Daher § 246 (2):

$$F = \frac{4 r' \pi^2 n^2}{g} . M = 59856 \text{ ℔.}$$

Man sieht hieraus, dass die Centrifugalkraft die Festigkeit des Materials bedeutend in Anspruch nehmen kann, z. B. beim schnellen Umdrehen der Flügel einer Mühle, der fortschreitenden Räder einer Locomotive &c. Eine Scheibe kann so schnell rotiren, dass sie in Stücke geht.

252.



Centrifugalpendel. An einer gleichförmig rotirenden verticalen Achse AB ist das eine Ende C einer dünnen (gewichtslos gedachten) Stange so befestigt, dass sie sich um den Drehpunct C nur in einer durch die Achse AB gehenden verticalen Ebene drehen kann. An das andere Ende D ist der Schwerpunct einer Kugel, deren Masse $=$ M ist, befestigt. Im Zustande der Ruhe liegt die Kugel an der Achse, so wie aber die Rotation eintritt, wird sich die Stange CA, das sogenannte Centrifugalpendel, vermöge der Fliehkraft der Kugel, um einen gewissen durch die Rotationsgeschwindigkeit bestimmten, sogenannten Elongationswinkel OCD von der Achse entfernen und dann bei gleichbleibender Geschwindigkeit in dieser Lage beharren. Die Kugel beschreibt alsdann einen horizontalen Kreis, dessen Mittelpunct O ist. Die Entfernung dieses Puncts O vom Aufhängepunct C, nämlich CO, heisst die Höhe des Centrifugal- oder conischen Pendels. Es ist einleuchtend, dass die Höhe $CO = h$ durch die constante Rotationsgeschwindigkeit bestimmt ist, umgekehrt muss also auch durch die Höhe h (die man beim Gebrauch eines solchen Pendels als Regulator bei Dampfmaschinen ablesen kann) die Geschwindigkeit der kreisenden Kugel, mithin die Zeit T eines ganzen Umlaufs bestimmt sein, und es handelt sich nun darum, diese Zeit T aus der Höhe h zu finden.

Setzen wir der Kürze halber $CO = r$, so ist die Geschwindigkeit der Kugel $c = \frac{2 r \pi}{T}$, mithin die Centrifugalkraft § 216, (2): $F = \frac{4 r \pi^2}{g T^2} . M$. Stellt nun die Linie DG das

vertical wirkende Gewicht M der Kugel dar, $DG = M$, und zerlegen wir dasselbe direct in die beiden Composanten DH und DE, von welchen erstere nach der Richtung der Stange wirkt und aufgehoben wird, letztere aber der Centrifugalkraft entgegen wirkt, so hat man (weil $\triangle GDE \sim \triangle DOC$) $DE : M = r : h$, woraus $DE = \frac{r}{h} M$. Für den Beharrungsstand (für ein gegebenes h) muss nun die Kraft DE der Fliehkraft F gleich sein, daher: $\frac{r}{h} M = \frac{4 r \pi^2}{g T^2} M$, woraus:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}$$

Man sieht hieraus, dass das Pendel CD sich bei noch so grosser Geschwindigkeit doch nie horizontal stellen kann, denn für $h = 0$ wäre auch die Umdrehungszeit der Kugel $T = 0$, was unmöglich ist. Wäre $h = 1'$, so wäre $T = 1{,}12$ Secunden.

Zwanzigstes Buch.

Von der Beharrlichkeit der Materie. Mittheilung der Bewegung. Wirkung und Gegenwirkung sind immer gleich.

253.

Erfahrung. Wenn ein Körper auf einer horizontalen Ebene liegt, so wird durch den Widerstand derselben sein Gewicht aufgehoben und der Körper ist vollkommen im Gleichgewicht und eine jede horizontal, z. B. vermittelst eines Fadens wirkende Kraft K, müsste nach den Gesetzen der rationalen Mechanik (von allen Widerständen, wie Reibung &c. abstrahirt) das Gleichgewicht stören und den Körper nach der Richtung der Kraft in Bewegung setzen. Die Erfahrung lehrt nun aber, dass, wenn die Cohäsionskraft des Körpers oder des Fadens nur gering ist, der Zug aber, welcher den Körper in Bewegung setzen soll, sehr rasch, durch einen Ruck, geschieht, der Faden oder ein Theil des Körpers, an welchen er befestigt ist, abreissen kann, ohne dass der Körper sich bewegt. Eben so lehrt die Erfahrung, dass auch umgekehrt, wenn ein Körper in rascher Bewegung ist und man ihn, bei dem Faden ergreifend, plötzlich in den Zustand der Ruhe versetzen wollte, der Faden oder ein Stück vom Körper wieder abreissen kann, ohne dass dadurch die Geschwindigkeit des Körpers geändert wird. Wie geht das zu? da doch, wenn der Zug nicht plötzlich, sondern allmälig geschieht, in beiden

Fällen die beabsichtigte Wirkung hervorgebracht, der Körper nämlich im ersten Fall in den Zustand der Bewegung und im zweiten in den der Ruhe versetzt werden kann.

254.

Unbekannt mit dem Wesen der Materie und mit den Kräften, welche in ihr verborgen sein mögen, nöthigt uns das eben erwähnte Factum zu der Vorstellung: dass die Materie in demjenigen Zustande, worin sie sich einmal befindet, sei es der Zustand der Ruhe oder der Bewegung, zu beharren sucht, weshalb man auch der Materie ein sogenanntes Beharrungsvermögen beilegt, und weil vermöge desselben der Körper wirklich einer Aenderung seines Zustandes der Ruhe oder Bewegung widerstrebt (entgegenwirkt, z. B. den Faden abreisst), so kann man dieses Beharrungsvermögen mit Newton immerhin als eine der Materie inwohnende Kraft betrachten, welche derjenigen Kraft, die ihren Zustand der Ruhe oder der Bewegung abzuändern bestrebt ist, oder auch wirklich abändert, direct entgegenwirkt. Laplace sagt (Système du monde p. 138): „Gewiss wird ein Körper, der unfähig ist, sich selbst zu bewegen, auch seine empfangene Bewegung nicht stören können; es ist also das Gesetz der Beharrlichkeit wenigstens das natürlichste, das einfachste, was man sich denken kann. Ueberdies wird es durch die Erfahrung bestätigt, denn wir sehen auf der Erde die Bewegungen desto länger fortdauern, je geringer die sich entgegenstellenden Hindernisse sind, woraus wir schliessen, dass ohne diese Hindernisse die Bewegungen ewig fortdauern würden. Vorzüglich merkwürdig ist die Beharrlichkeit der Materie bei den himmlischen Bewegungen, welche seit Jahrtausenden von keiner wahrnehmbaren Störung zeigen. Wir betrachten daher die Beharrlichkeit als ein Gesetz der Natur und wenn wir Störung in der Bewegung eines Körpers finden, schreiben wir sie einer fremden Ursache zu."

Man beachte hiebei, dass das Beharrungsvermögen eines Körpers nicht Folge seines Gewichts ist, sondern einzig der Materie inhärirt. Derselbe Körper würde auf der Sonne, wo sein Gewicht 28mal grösser, oder auf dem Monde, wo es 5mal kleiner ist, doch dasselbe Beharrungsvermögen zeigen.

255.

Dies Princip der Beharrlichkeit ist einer von den wichtigsten Grundbegriffen der Naturwissenschaft. Viele sonst befremdende Erscheinungen lassen sich nicht allein ganz natürlich daraus erklären, sondern als nothwendig mit mathematischer Gewissheit voraussagen. Hängt z. B. ein Körper an einer Federwaage, und steht der das Gewicht andeutende Zeiger z. B. auf dem Theilstrich 200 und man zieht nun die Waage rasch, z. B. mit 20 Fuss Geschwindigkeit, in die Höhe, so wird, vermöge der Beharrlichkeit des Körpers, in seinem Zustande der Ruhe zu bleiben, die Feder mehr gespannt und der Zeiger anfangs ein grösseres Gewicht zeigen und z. B. auf den Theilstrich 201 kommen, dann aber, wenn die Geschwindigkeit dieselbe bleibt, bald wieder auf 200 stehen. Lässt man nun die Geschwindigkeit plötzlich, z. B. bis auf 10 Fuss abnehmen, so wird der Zeiger, vermöge der Beharrlichkeit des Körpers, in seinem Zustande (20 Fuss Geschwindigkeit) zu bleiben, anfangs z. B. auf den Theilstrich 199 zurückgehen und einen Augenblick ein kleineres Gewicht zeigen, dann aber bei derselben Geschwindigkeit (jetzt 10 Fuss) wieder auf 200 zu stehen kommen.

Befestigt man an dem ausgehöhlten Umfange einer Scheibe einen Faden, wickelt denselben auf und lässt dann die Scheibe (joujou) an dem Faden herunter rollen, so wird sie, vermöge ihrer Rotationsbeharrlichkeit, an der andern Seite wieder hinaufrollen.

256.

Weil die Kraft K aber doch einen ruhenden Körper in Bewegung oder einen sich bewegenden Körper in Ruhe versetzen kann, wenn sie nicht plötzlich (stossweise), sondern allmälig wirkt (§ 253), so müssen wir ferner schliessen, dass Ursache und Wirkung nie gleichzeitig Statt finden,*)

*) Dieses ist auch in der geistigen Welt der Fall. Das Wahrnehmen einer Sache und das Bewusstwerden derselben findet nicht augenblicklich Statt. Die Sinneseindrücke brauchen Zeit, um über die Schwelle des Bewusstseins zu kommen, und diese Zeit kann bei verschiedenen Personen sehr differiren. Von zwei Observatoren an der Greenwicher Sternwarte notirte der eine den Durchgang der Sterne durch den Meridian stets um eine halbe Secunde später als der andere und musste, in Folge dessen, seine Stelle aufgeben.

d. h. die Kraft, welche den Zustand der Ruhe oder Bewegung eines Körpers abändert, kann dies nicht in einem Augenblick thun, sie muss eine gewisse Zeit wirken und diese Zeit, wie klein sie bei sehr kleinen Massen auch sein möge, ist nicht unendlich klein (keine Infinitesimalgrösse) und dies schon aus dem Grunde nicht, weil ein Körper nicht an zwei Orten zugleich sein kann. Hieraus folgt nun auch, dass es, streng genommen, eigentliche Stosskräfte (Momentankräfte), insofern man darunter nur augenblicklich wirkende Kräfte verstehen will, überall nicht giebt. Zur Unterscheidung werden jedoch diejenigen Kräfte, welche nur während einer sehr kleinen, nicht genau anzugebenden Zeit wirken, Stosskräfte genannt.

257.

Weil nun die Wirkung einer Kraft nicht im Nu, sondern erst nach einer endlichen, wenn auch noch so kleinen Zeit erfolgen kann, so können oder müssen wir ferner annehmen, dass die Wirkung der Kraft (Bewegung oder Ruhe) sich der ganzen Masse von Theilchen zu Theilchen erst mittheilen muss, was desto mehr Zeit erfordert, je grösser die Masse ist. Um durch eine Kraft K den bereits auf den Punct der Unterbrechung des Gleichgewichts gebrachten „Great Eastern" in Bewegung zu setzen, ist mehr Zeit erforderlich, als bei einem kleinen Boote, weil jedes noch so kleine Theilchen ein Beharrungsvermögen besitzt und dieses also der Masse des Körpers proportional sein muss. Steht man in einem ruhenden Boote und dasselbe wird rasch fortgestossen, so kann man hintenüber fallen, wenn die Mittheilung der Bewegung von den Füssen zum Kopfe nicht so schnell Statt finden kann. Steht man in einem sich bewegenden Boote und dasselbe wird, durch einen Stoss am Ufer, plötzlich aufgehalten, so kann man vorne über fallen, weil hier die Mittheilung der Ruhe Zeit fordert. In rascher Bewegung kann man auf Eisschuhen über eine schwache Eisdecke weglaufen, welche, wenn man darauf stehen bliebe, durchbrechen würde. Aus einer Säule Dambrettsteine kann man einen herausschlagen, ohne dass die Säule umfällt. Durch eine Thür, die lose in ihren Angeln hängt und durch die geringste Kraft bewegt werden könnte, kann man eine Kugel schiessen, ohne dass die Thür sich bewegt. Könnte man eine sich nach ihrer Längenrichtung sehr rasch bewegende

Stange, in ihrer Mitte fassend, plötzlich aufhalten, so würde, vermöge der Beharrlichkeit der Materie, ihre Bewegung fortzusetzen, das hintere Ende sich verdichten, das vordere sich ausdehnen, wenn nicht abreissen. Das Ricochetiren der Kanonenkugel auf der Erde und auf dem Wasser &c. &c.

Viele finden es unbegreiflich, wie ein nur durch einen einmaligen Stoss getriebener Körper fortfahren könne, sich gleichförmig zu bewegen, da doch keine Kraft weiter auf ihn wirke. Nach dem Princip der Beharrlichkeit müsste aber gerade das Gegentheil unbegreiflich sein, wenn nämlich der durch einen Stoss in Bewegung gesetzte Körper ohne Ursache von der Richtung der Kraft abwiche oder die ihm eingeprägte Geschwindigkeit im Geringsten änderte. Fernere Stösse müssten ja seine Bewegung beschleunigen.

258.

Ein anderes von Newton erkanntes wichtiges, dem Anfänger befremdendes Naturgesetz ist noch: dass bei der Wirkung einer jeden Kraft immer eine gleich grosse Gegenwirkung Statt findet; kurz: Wirkung und Gegenwirkung sind gleich. Wäre dies nicht der Fall, so würde von der Wirkung einer Kraft gar nicht die Rede sein können.

Wirkt z. B. eine Zugkraft vermittelst eines Fadens auf einen Körper, so ist die Spannung des Fadens vorwärts und rückwärts gleich gross. Der Faden würde offenbar gar nicht gespannt sein können, wenn der Körper, woran er befestigt ist, nicht eben so stark zurückzöge, als die Kraft vorwärts zieht. Drückt oder stösst man einen Körper mit dem Finger, so erleidet der Finger einen eben so starken Gegendruck oder Stoss. Man würde auf einen Körper offenbar keinen der Grösse nach bestimmten Druck, z. B. von 100 ℔, ausüben können, wenn der Körper nicht eben so stark entgegenwirkte, sondern auswiche. Drückt man, am Lande stehend, mit einer Stange ein Boot vom Ufer ab, so drückt die Stange in entgegengesetzter Richtung mit derselben Kraft. Stände man in dem Boote selbst und drückte mit der Stange gegen das Ende des Bootes, so würde dasselbe, wegen des gleichen Gegendrucks, nicht aus der Stelle kommen. Stände man in einem andern gleich leicht beweglichen Boote, so würde dieses eben so viel zurück, als das erstere vorwärts gehen. Wollte

ein Schiffer, in seinem Boote stehend, mit einem Blasebalg auf ein Segel wirken, so würde dies nichts helfen.

Anmerkung. Dieses Princip: dass Wirkung nnd Gegenwirkung nothwendig immer gleich sind, ist als ein reiner Vernunftschluss zu betrachten. Besässe die Materie kein Beharrungsvermögen, wären Wirkung nnd Gegenwirkung nicht gleich, wir würden die Vorstellung von Materie gar nicht haben, indem wir diese nnr durch den Tastsinn erhalten. Dass Sonne, Mond &c. Körper sind nnd keine Spiegelbilder, können wir nnr aus ihrer gegenseitigen Wirkung auf einander schliessen.

Von der Grösse des Beharrungsvermögens eines Körpers hängt es offenbar ab, wie gross die ihm durch eine Kraft (z. B. Stoss) ertheilte (oder entzogene) Geschwindigkeit ist. Denkt man sich das Beharrungsvermögen 100, 1000 ... mal kleiner, so würde die Geschwindigkeit so viel mal grösser sein. Gäbe es gar kein Beharrungsvermögen, so würde eine endliche Kraft eine unendlich grosse Geschwindigkeit hervorbringen können, oder die Kraft würde in diesem Fall keinen Gegenstand ihrer Wirkung finden.

Ans dem Vorhergehenden ist nun wohl klar, dass, je grösser die Masse eines sich bewegenden Körpers ist, desto grösser muss auch sein Beharrungsvermögen und deshalb auch desto mehr Kraft erforderlich sein, um in einer bestimmten Zeit seine Geschwindigkeit oder seine Richtung um eine bestimmte Grösse zu ändern.

Dies bestätigt übrigens auch die Erfahrung und es ist hier der Ort, durch das wichtige Princip der Beharrlichkeit der Materie die merkwürdigen und scheinbar gegen alle Gesetze der rationalen Mechanik streitenden paradoxen Erscheinungen zu erklären, welche die Rotation eines Körpers erzengt, der sich nicht um eine feste, sondern bewegliche Achse dreht, wie z. B. der Kreisel, Gyroscop &c., denn eine einfache und klare Vorstellung haben wir von der rotirenden Bewegung eines Körpers nur dann, wenn er um eine feste Achse rotirt.

Eine schon 1817 von Bohnenberger erfundene, jedoch ganz in Vergessenheit gerathene Maschine, ursprünglich zur Versinnlichung der Bewegungen der Erdachse und dadurch entstehende Präcession der Nachtgleichen bestimmt, ist in nenerer Zeit unter dem Namen Gyroscop wieder aufgetancht, und da unseres Wissens bis jetzt noch keine genügende Erklärung der höchst merkwürdigen Erscheinungen gegeben ist,

welche man an dieser in Bewegung gesetzten Maschine wahrnimmt, so wollen wir versuchen, eine naturgemässe und populäre Erklärung dieser Maschine und zunächst des damit verwandten Kreisels zu geben, von welcher selbst Euler sagt, dass sie noch in das grösste Dunkel gehüllt ist. Wir sagen absichtlich: versuchen, indem wir keineswegs annehmen, dass gegen nachfolgendes Raisonnement über diese häkelige Sache keine Einwendungen gemacht werden könnten. In diesem Falle wünschen wir aber sehr, dass ein Anderer hiedurch angeregt, recht bald eine bessere populäre Erklärung aufstelle.

259.

Prämissen. 1. Man stelle sich zuerst vor: ein um seine Achse rotirender Cylinder von gleichförmiger Dichtigkeit falle so auf eine horizontale Ebene, dass alle Puncte einer Seitenlinie gleichzeitig mit der Ebene in Berührung kommen. Jedenfalls wird dann durch die Reibung, wie klein sie auch sein möge, die Rotationsgeschwindigkeit dieser die Ebene berührenden Puncte verzögert, der Cylinder kann deshalb nicht auf der Stelle rotiren, sondern muss, durch die Beharrlichkeit der nicht berührenden Puncte genöthigt, in eine wälzende (rollende) Bewegung kommen, wobei die Achse des Cylinders parallel mit sich selbst (progressiv) fortschreitet. Der Cylinder befindet sich in einem ähnlichen Falle, als wenn er auf der horizontalen Ebene läge und durch zwei gleiche horizontale, rechtwinklig an den Enden seiner Achse wirkende Kräfte in Bewegung gesetzt würde.

Es ist ferner einleuchtend, dass bei derselben Rotationsgeschwindigkeit der progressive Fortschritt der Achse dem Radius der Grundfläche proportional wächst, denn so viel mal der Radius grösser ist, so viel mal mehr muss sich in derselben Zeit abwickeln. Deshalb kann auch die Achse eines Kegels, dessen Schwerpunct durch eine auf der Achse senkrechte und mit der horizontalen Unterlage parallele Kraft bewegt wird, sich gar nicht progressiv, sondern nur drehend bewegen, weil die Abwickelung der Spitze sehr klein und, als mathematischer Punct gedacht, $= 0$ ist.

Wäre aber das eine Ende des so in Bewegung gesetzten Cylinders schwerer, als das andere, oder wenn er schon rotirt, plötzlich schwerer gemacht (etwa durch Anhängung eines Ge-

wichts an das eine hervorragende Ende seiner Achse), so würde der Cylinder zwar auch fortrollen, das schwerere Ende jedoch, wegen seines grössern Beharrungsvermögens, gegen das leichtere Ende zurückbleiben und die Achse sich drehen. (Man wird bemerken, dass in diesem Beharrungsvermögen und in der zur Mittheilung der Bewegung erforderlichen Zeit der eigentliche physische Grund, oder die Erlaubniss zu dem § 234 ausgeführten mathematischen Manöver liegt.)

2. Das Beharrungsvermögen eines Körpers in Bezug auf seine Geschwindigkeitsänderung ist zwar immer dasselbe, nämlich von der Grösse der Geschwindigkeit ganz unabhängig. Dieselbe Kraft, welche in einer bestimmten Zeit die Geschwindigkeit c, z. B. 100′ eines Körpers um 10′ vergrössert oder verkleinert, würde dieselbe Geschwindigkeits-Aenderung, nämlich 10′, in derselben Zeit bewirken, wenn desselben Körpers Geschwindigkeit statt 100′ eine ganz beliebig andere, z. B. 10000′ &c. wäre. In Bezug auf die Richtung aber ist diese Aenderung desto geringer, je grösser die Geschwindigkeit des Körpers ist. Ist die Geschwindigkeit eines Körpers $= c$ und errtheilt ihm eine Kraft die Geschwindigkeit c', senkrecht auf seine Bewegungsrichtung, so ist die Resultante aus beiden $= \sqrt{c^2 + c'^2}$ und der Körper wird offenbar desto weniger von seiner anfänglichen Richtung abweichen, je grösser c gegen c' ist; denn ist α der fragliche Abweichungswinkel, so ist: $tg\ \alpha = \frac{c'}{c}$.

260.

Der Kreisel. Man denke sich auf einem vollkommen ebenen horizontalen Tische einen Kreisel in schnelle Rotation gesetzt, jedoch zuerst so, dass seine Achse vertical ist. Dann wird der Kreisel, wenn das untere Ende der Achse spitz ist, eine Zeit lang mit horizontaler Scheibe auf der Stelle rotiren, und es ist, vom Widerstande der Luft abstrahirt, nur die vom Druck herrührende Reibung (Bohren), welche die Rotationsgeschwindigkeit stetig verzögert. Giebt man dem Kreisel jetzt einen horizontalen Stoss oder Druck, so kann die rotirende Achse sich gleichzeitig und parallel mit sich selbst nach dieser Richtung bewegen. Bringt man die Ebene des Tisches in eine schiefe Lage, so muss das respective Gewicht den Kreisel mit vertical bleibender Achse hinunter ziehen, weil gar keine

Kraft vorhanden ist, die beharrliche Scheibe aus ihrer horizontalen Lage zu bringen.

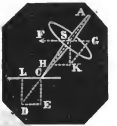
Ist die eine Hälfte der mit verticaler und fein zugespitzter Achse in rasche Rotation gesetzten Scheibe des Kreisels schwerer als die andere Hälfte, so wird man anfangs die Abweichung der Scheibe von ihrer horizontalen Lage, wegen § 259, 2, nicht merken. Wenn aber die Winkelgeschwindigkeit w bis zu einem gewissen Grad abgenommen hat, muss diese Abweichung merklich werden. Das im nicht unterstützten Schwerpunct vertical wirkende Gewicht M des Kreisels kann man nach einem Puncte der Achse versetzt und hier, wie in folgender Randanmerkung gezeigt, in zwei Kräfte zerlegt denken, wovon die eine mit rotirende Composante immer horizontal wirkt, und dadurch die zugespitzte auf der Stelle rotirende Achse stets nöthigt, sich gegen die horizontale Ebene, wegen der Abnahme von w, immer mehr zu neigen und eine kurze Zeit conische Flächen zu beschreiben.

Wird aber ein Kreisel auf einem ebenen, horizontalen Tische mit geneigter und etwas abgerundeter, oder platt abgeschliffener Achse in Rotation gesetzt, dann muss er in einer spiralförmigen Linie fortrollen, denn das untere rotirende und jetzt nicht bohrende Ende muss, der Reibung halber, rollen. Wäre die ganze Masse M des Kreisels im untern Ende vereint, so würde dasselbe, wie eine Kugel, mit einer durch die Winkelgeschwindigkeit, w, bestimmten rollenden Geschwindigkeit gradlinig fortrollen, wegen der stetig wirkenden Reibung und des Widerstandes der Luft jedoch bald zur Ruhe kommen.

Weil nun aber das untere Ende die ganze Masse mit sich ziehen und die progressive gradlinige Bewegung sich der schweren nicht unterstützten und deshalb, wegen mangelnder Reibung, nicht rollenden, sondern nur rotirenden Scheibe mittheilen muss, was nicht in einem Nu geschehen kann, so bleibt das obere Ende wegen seines Beharrungsvermögens, auf der Stelle zu rotiren, gegen das untere Ende zurück. Die cylindrische Achse SA kann also beim Fortrollen des Kreisels nicht parallel mit sich selbst bleiben, ihre Lage ändert sich stetig und deshalb kann das untere Ende A nur in einer krummen Linie rollen. Sei in irgend einem Puncte dieser krummen Linie die stets abnehmende tangentiale Geschwindigkeit $= v$, der Krümmungshalbmesser $= r$, so ist in

diesem Punct die Fliehkraft $F = \frac{v^2}{rg} M$ (§ 243). Ist nun (indem man sich vom Stützpunct A auf die Richtungen der Fliehkraft F und des Gewichts M, die beide im Schwerpunct des Kreisels wirken, Perpendikel gefällt denkt [§ 245]) das Moment der Fliehkraft grösser, als das Moment des Gewichts, und das muss sein, wenn der Kreisel nicht fallen soll, so wird die Achse allmälig aufgerichtet.*) Ist die Achse in verticale Lage gekommen, so findet nur noch reine gleitende Reibung Statt, welche die noch vorhandene Winkelgeschwindigkeit w bald aufzehrt und der Kreisel befindet sich im labilen Gleichgewicht. Man sieht hieraus zugleich, dass, wegen der Fliehkraft, der Kreisel unmöglich mit verticaler Achse in einer krummen Linie laufen kann, weil die Fliehkraft ihn ja umwerfen, aus der Bahn hinausschleudern würde. Ob der Kreisel bei dieser Bewegung mit seinem ganzen Gewicht auf die Unterlage drückt, oder dazu keine Zeit hat, kommt hiebei nicht in Betracht (vergl. § 257). Jedenfalls ist klar, dass der Kreisel ohne Unterstützung, trotz seiner Rotation, mit der Beschleunigung $g = 31\frac{1}{4}'$ fallen würde.

Neigt man die Ebene, worauf der nicht zugespitzte Kreisel läuft, gegen den Horizont, so muss er offenbar, je



*) Ist α der Winkel, den die Achse AC mit der Verticalen macht, und zerlegt man das Gewicht $SK = M$ in die beiden Composanten $SG = M \operatorname{tg} \alpha$ und SH, wovon erstere der Fliehkraft F entgegen, die andere in der Richtung der Achse wirkt (§ 148). Letztere, $SH = CD$, zerlegt sich wieder in $CE = M$, senkrecht auf die stützende Tischfläche und in $CL = M \operatorname{tg} \alpha$ parallel mit ihr. Ist nun $F > M \operatorname{tg} \alpha$, so muss die Achse sich aufrichten, selbst wenn die Reibung der immer kleiner werdenden radialen Kraft $CL = M \operatorname{tg} \alpha$ anfangs nicht völlig das Gleichgewicht halten könnte. Ist die Achse in verticale Lage gekommen, der Schwerpunct S aber nicht vertical über dem Stützpunct C, so kann der Kreisel, wenn w noch gross genug ist, von Neuem rollen. Da dann aber v immer ab- und r zunimmt, so wird: $M \operatorname{tg} \alpha > \frac{v^2}{rg} M$ und der Kreisel fällt um. Er wird dann, wegen der Reibung der Scheibe, in Bezug auf die durchlaufene spiralförmige Bahn rückläufig, in Bezug auf die Rotation der jetzt rollenden Scheibe aber bleibt er rechtläufig &c. &c.

nachdem er mit der rechten oder linken Hand gedreht worden, sich gleichzeitig nach dieser Seite hin bewegen, und kann dabei auf- und absteigend Schleifen beschreiben.

261.



Das Gyroscop. Es sei *ced* ein verticaler, halber oder ganzer Ring, der sich um eine an ihn befestigte, an einer Hülse gehende, verticale Achse *ef* drehen kann. In diesem Ringe kann sich ein anderer Ring *ahb* um die stets horizontale Achse *cd* und in diesem Ringe wiederum eine sehr schwere Scheibe (beim Bohnenberg'schen Apparat eine Kugel oder Ellipsoid) um die mit *cd* stets einen rechten Winkel bildende Achse *ab* drehen. Die Richtungen aller drei Achsen gehen durch den Schwerpunct der Scheibe, weshalb das aus Metall accurat construirte Gyroscop in allen Lagen der Ringe im Gleichgewicht sein muss. In diesem Zustande bewirkt ein kleines, an der einen Seite des Ringes, z. B. an die rechte, bei *b* angehängtes Gewicht eine Drehung dieses zuvor horizontal gestellten Ringes um die horizontale Achse *cd*, so dass dieser Ring *ahb*, sammt der Achse *ab*, bald in verticale und folglich die symmetrische Durchschnitts-Ebene der Scheibe in horizontale Lage kommen.

Ganz anders verhält sich nun aber die Sache, wenn die zuvor wieder vertical gestellte, möglichst schwere Scheibe durch rasches Abziehen einer um die horizontale Achse *ab* gewickelten Schnur (wobei man den Ring, worin sie läuft, so lange festhält) in schnelle Rotation gesetzt wird. Jetzt kann man ein bedeutendes Gewicht an die eine Seite des (nun freigelassenen) horizontalen Ringes, z. B. bei *b* anhängen, oder einen Druck gegen die rotirende Scheibe ausüben, ohne dieselbe sogleich merklich aus ihrer verticalen Lage zu bringen. Der horizontale Ring aber fängt nun auffallenderweise gleich beim Anhängen des Gewichts an, sich zu drehen und zwar so,

dass der Punct b sich in entgegengesetzter Richtung, wie der oberste Punct der Scheibe, bewegt.

Rotirt die Scheibe nach Wegnahme des Anhängegewichts in einer bestimmten, z. B. in der von Norden nach Süden gehenden Ebene, so kann man das Postament des Gyroscops beliebig im Zimmer umhertragen, die Scheibe bleibt, gleichsam wie eine Compassnadel, sich lange Zeit parallel. Ist hierbei das Gyroscop so in ein Kästchen gesetzt, dass der verticale Ring sich nicht drehen kann, so ist es gerade, als ob ein im Kästchen befindliches lebendes Wesen die Drehung des Kästchens zu hindern suche, kurzum, dass ein Körper durch die Bewegung gleichsam Leben erhält.



Ist die zuvor wieder vertical gestellte Scheibe durch Abziehen der Schnur in rasche Rotation gesetzt, so kann man den horizontalen Ring aus dem (zu diesem Zweck dazu eingerichteten) Apparat so heraus nehmen, dass nur das eine Ende a der horizontalen Achse ab unterstützt ist (an einem Faden hängend). Die Achse ab und folglich auch der Ring, worin sie läuft, bleiben während ein paar Minuten fast ganz horizontal, drehen sich aber um den Stützpunct a und zwar so, dass der Punct b sich in entgegengesetzter Richtung, wie der oberste Punct der rotirenden Scheibe bewegt. Wie geht das zu?

262.

Das Beharrungsvermögen gegen die tangentiale Richtungsänderung, z. B. eines Puncts der Scheibe, kann durch blosse Steigerung der Geschwindigkeit auf einen sehr hohen Grad gebracht werden (§ 259, 2), wie man schon an einem ganz leichten mit horizontaler Scheibe rotirenden Kreisel wahrnimmt und fühlt, indem man ihn durch einen Druck gegen die Achse oder rechtwinklig auf die Scheibe aus seiner Lage zu bringen sucht.

Bedenkt man nun, dass durch das rasche Abziehen der Schnur die schwere Scheibe des Gyroscops eine sehr grosse Rotationsgeschwindigkeit erhält, so ist hier offenbar eine weit

bedeutendere Kraft, als bei dem leichten Kreisel, erforderlich, um die rotirende schwere Scheibe aus ihrer Lage zu bringen oder die tangentiale Richtung des gedrückten Punctes zu ändern. Die Kraft, welche es jedoch zu thun bestrebt ist, indem man das Gyroscop im Zimmer umher trägt, rührt nur von der Reibung der verticalen Achse ef her. Diese Kraft ist aber zu unbedeutend, um schon in kurzer Zeit eine wahrnehmbare Wirkung hervorzubringen und aus diesem Grunde bleibt die Symmetrie-Ebene der Scheibe sich lange Zeit hindurch parallel.

Bedenkt man ferner, dass eine jede rotirende, nicht verticale Achse, wegen der wenn auch noch so kleinen Reibung immer das Bestreben hat, zu rollen, progressiv fortzuschreiten, und deshalb gegen die Pfannenläger drückt, so ist klar, dass, wenn nur das eine, am Faden hängende Ende a der horizontalen Achse ab unterstützt ist, dieses Ende nicht allein rotirt, sondern auch wegen der jetzt Statt findenden doppelten Reibung (das eine Pfannenlager hat ja das ganze Gewicht allein zu tragen) rollt und dadurch einen Druck gegen die Pfanne a ausübt. Das andere nicht unterstützte Ende b dagegen erleidet keinen Druck, also auch keine Reibung und kein dadurch verursachtes Rollen und muss deshalb, kraft seines Beharrungsvermögens, gegen das Ende a zurückbleiben (§ 259); daher ein wenn auch noch so kleines Bestreben der horizontalen Achse ab, sich um das Ende a im angegebenen Sinne zu bewegen.

Eine andere und zwar ganz allein genügende Ursache, diese Bewegung hervorzurufen, finden wir in Folgendem: Das im Schwerpunct wirkende Gewicht M ist bestrebt, die Achse ab in verticaler Ebene um den Stützpunct a zu drehen und man kann sich also, statt dieses Gewichtes M, jeden Augenblick zwei gleiche entgegengesetzte mit der Achse parallele Kräfte im höchsten und tiefsten Punct der rotirenden Scheibe angebracht denken, welche dieselbe Wirkung hervorbringen (§ 70 Zus.). Dadurch wird jedem der beiden Puncte eine gewisse Geschwindigkeit, senkrecht auf seine tangentiale, eingeprägt. Die Endpuncte eines jeden Durchmessers der Symmetriescheibe haben entgegengesetzte Geschwindigkeiten. Diese Geschwindigkeitspaare kann man aber durch Drehung in der Symmetrieebene auf ein einziges reduciren und durch zwei gleiche Momentankräfte erzeugt denken, deren Angriffspuncte ebenfalls der höchste und tiefste Punct der rotirenden

Scheibe sind (§ 125). Aus beiden Geschwindigkeits-Composanten, sowohl des höchsten als tiefsten Punctes, entspringt eine Resultante R, welche, weil nicht parallel mit der Achse *ab*, diese Puncte desto rascher von ihrer tangentialen Richtung ablenken, je schwerer die Scheibe und je geringer die Rotationsgeschwindigkeit ist (§ 259, 2). Beide Resultanten bilden ein Kräftenpaar (R, — R), welches sich, in dessen Ebene, auf ein anderes (V, — V), von kürzerem Hebelarm reduciren lässt, dessen Endpuncte in die Seitenfläche der Achse *ab* fallen (§ 126). In dieser gegen die Achse *ab* geneigten Durchschnittsebene drehe man letzteres Kräftenpaar (V, — V) so, dass sein Hebelarm horizontal wird, und denke sich dann jede der beiden entgegengesetzten Kräfte V, — V wieder in zwei Composanten zerlegt, wovon die Richtung der einen, P, mit der Seitenlinie der cylindrisch gedachten Achse *ab* zusammenfällt und die andere, Q, darauf senkrecht ist. Dann hat man zwei Kräftenpaare, wovon das eine (P, — P) (dessen horizontalen Hebelarm man in der Symmetrieebene der Scheibe annehmen kann, § 125) die Achse *ab* oder, was dasselbe ist, die rotirende Scheibe stets um einen Durchmesser dreht, welcher senkrecht auf dem horizontalen ist.

Anmerkung 1. Dieselbe Erscheinung muss eintreten, wenn man, anstatt die rotirende Scheibe herauszunehmen, das eine Ende der horizontalen Achse, oder die eine Seite des horizontalen Ringes, wie vorhin erwähnt, mit einem Gewichte belastet. Ausser dem eben erwähnten Kräftenpaar möchte auch hier die Reibung wieder mitwirken, weil durch die Belastung der einen Seite der Achse oder des Ringes die Beharrlichkeit gegen den progressiven Fortschritt grösser wird.

Anmerkung 2. Das Gyroscop kommt in verschiedenen Gestalten vor, die obige Theorie desselben, wenn sie überhaupt eine solche ist, bleibt aber immer dieselbe. Befinden sich an einer Achse zwei Scheiben, die in demselben Sinne rotiren, so muss dadurch die Beharrlichkeit der Achse noch grösser werden. Rotiren die zwei völlig gleichen Scheiben aber entgegengesetzten Sinnes, so ist das Beharrungsvermögen der Achse offenbar $= 0$.

Ist das Gyroscop an dem einen Ende eines Hebels befestigt, der sich gleichzeitig um eine verticale Achse und um einen horizontalen Stift darin drehen kann, und dessen anderes Ende ein verschiebbares Laufgewicht trägt, so muss, wenn der Hebel nicht im Gleichgewicht ist, dieselbe Erscheinung ein-

treten. Je nachdem dann das Gyroscop sinkt oder steigt, dreht sich die rotirende Scheibe nach entgegengesetzten Richtungen (augenblicklich) um ihren horizontalen Durchmesser, und dadurch ist dann die Richtung bestimmt, in welcher sich der Hebel drehen muss. Hiebei kann dann aber die Reibung, weil sie auf beiden Seiten gleich ist, nicht den geringsten Einfluss üben. Durch das Kräftenpaar lässt sich auch die Bewegung der Achse der Erde und des Kreisels erklären.

263.

Foucault's Pendelversuch. Befestigt man das eine Ende eines Fadens mit einer daran hängenden Kugel (ein Pendel, Senkblei), so muss im Zustande der Ruhe der Faden vertical gerichtet sein (§ 38). Bringt man dieses Pendel aus der Gleichgewichtslage und überlässt es dann sich selber, so wird es, durch die verticale Anziehungskraft der Erde genöthigt, hin- und hergehende Schwingungen machen. Die Anziehungskraft kann man sich nämlich in jedem Augenblick in zwei Composanten zerlegt denken, wovon die eine nach der Längenrichtung des Fadens wirkt und denselben spannt, und die andere, darauf rechtwinklig wirkend, das Pendel in Bewegung setzt (§ 233), die, wenn das Pendel lang nnd die Kugel (wegen des Widerstandes der Luft) recht schwer ist, Stundenlang anhalten kann.*)

Bei der Beobachtung solcher Pendelschwingungen hatte man schon 1661 in Florenz die damals sehr anffallende und nicht zu erklärende Erscheinung bemerkt, dass die verticale Ebene, in welcher das Pendel hin und her schwingt, sich um die verticale Gleichgewichtslinie dreht und zwar von Süden nach Westen, wenn das Pendel in einer Meridianebene schwingt und man den Blick nach Süden richtet.

Erst in neuerer Zeit fand Foucault's Scharfsinn, dass die Ursache dieser nur scheinbaren Drehung der verticalen Schwingungsebene in der täglichen Umdrehung der Erde um ihre Achse liegt, und gründete darauf einen nenen rein physicalischen Beweis für die Rotation der Erde.

---

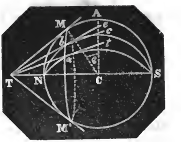
*) Das Pendel, welches Foucault 1852 im Pantheon in Paris schwingen liess, war 67 mètre lang und die Pendelkugel wog 28 Kilogramm. Ein anderes Pendel war nur 2 mètre lang und die Kugel wog nur 5 Kilogramm.

Trägt man nämlich ein schwingendes Pendel im Zimmer umher, so müssen, wegen der Beharrlichkeit des Pendels, die Schwingungsebenen, eben so wie beim Gyroscop (§ 252), parallel bleiben, selbst wenn man den verticalen Faden um sich selbst dreht, weil hier ja eine seitlich wirkende, jedoch nicht vorhandene Kraft erforderlich wäre, um die verticale Schwingungsebene zu drehen.

Lässt man ein Pendel auf dem Aequator, z. B. in einer Meridianebene schwingen, so muss die Schwingungslinie (indem wir den kleinen Bogen, in welchem die Spitze der Pendelkugel hin- und hergeht, der Kürze halber, als eine grade Linie und als eine Tangente vom Meridian betrachten) stets parallel mit der Erdachse bleiben, ob die Erde sich dreht oder nicht. Denn dreht sie sich von Westen nach Osten, so hat die Pendelkugel nach dieser Richtung immer dieselbe Geschwindigkeit, wie ein Punct im Aequator und es ist kein Grund vorhanden, dass die stets verticale Schwingungsebene sich drehen könne.

Denken wir uns aber das Pendel an einem der Pole, z. B. am Nordpol N in der verlängerten Erdachse aufgehängt und in Ruhe, so fällt die Richtung des vertical gespannten Fadens mit der Erdachse zusammen. Bringt man nun das Pendel aus der Ruhelage, so muss es jetzt nothwendig in einer Meridianebene schwingen. Denkt man sich diese Ebene als fest im Raume oder als Meridianebene des Himmels, so muss das Pendel, weil es jetzt an einem unbeweglichen (sich auf der Stelle drehenden) Punct hängt, vermöge seiner Beharrlichkeit in dieser fest gedachten Ebene schwingen. Alle Erdmeridiane müssten sich dann, wenn die Erde wirklich in 24 Stunden um ihre Achse rotirt und das Pendel so lange schwingt oder durch nöthige Stösse dazu angehalten wird, durch diese unbewegliche Schwingungsebene drehen. Einem Beobachter am Pol, der nicht an die Umdrehung der Erde glaubt und nicht fühlt, dass er sich mitdreht, müsste es scheinen, als wenn die Schwingungsebene sich in entgegengesetzter Richtung um die verticale Gleichgewichtslage ganz herum dreht. Die Schwingungslinie der Pendelspitze würde dann eine am Nordpol N gedachte, in 360° getheilte horizontale, also auf NS senkrechte Scheibe von 0 bis 360° ganz durchlaufen und folglich schon nach einer Stunde 15° von ihrer anfänglichen Richtung abweichen.

Schwingt das Pendel zwischen dem Pol und Aequator in



einem durch den Ort a gehenden Meridian, so muss die Schwingungslinie (als Tangente betrachtet) die verlängerte Erdachse in einem Punct T schneiden. Dreht sich nun die Erde, so beschreibt die Tangente aT die Seitenfläche eines Kegels. Ist die Seitenlinie aT dieses Kegels in die Lage bT gekommen und denkt man sich den Bogen ab des durch a gehenden Parallelkreises so klein, dass man das Stück bTa der Seitenfläche des Kegels als eine ebene Fläche betrachten darf, so kann man darin durch b eine Linie bc parallel mit at gezogen denken, so dass also der Winkel $ebc = b\mathrm{T}a$ ist.

Das im Meridian von a in Schwingungen gesetzte Pendel ist nun (gerade so, als wenn es im Zimmer umhergetragen würde) vermöge seiner Beharrlichkeit bestrebt, immer in einer mit at parallelen Linie zu schwingen und die stets verticale Schwingungsebene hat sich also scheinbar um die von a nach b gekommene verticale Gleichgewichtslinie, um den Winkel ebc gedreht, und diese Abweichung vom Meridian muss sich, wenn auch nicht so beträchtlich als am Pol, dennoch an einer in a angebrachten, in 360° getheilten horizontalen Scheibe nach einiger Zeit wahrnehmen lassen, wenn die Erde sich dreht. Dies ist nun wirklich der Fall und somit der populäre anschauliche Beweis der Rotation der Erde erledigt.

*) Um die Grösse der ganzen scheinbaren täglichen Drehung der verticalen Schwingungsebene des Ortes a zu finden, braucht man nur die Summe der unendlich kleinen Winkel, wie aTb &c. zu bestimmen, welche um die Spitze T des beschriebenen Kegels liegen.

Sei des Ortes a geographische Breite $\mathrm{ACM} = \beta$, der Erd-Radius $\mathrm{MC} = r$, der Radius des durch a gehenden Parallelkreises $= r'$, die Seitenlinie $\mathrm{MT} = l$, so ist: $r' = r \cos\beta$, $l = r \cot\beta$ (weil $\mathrm{MTC} = \beta$), die ganze Seitenfläche des Kegels $= r'\pi l$. Wickelt man diese Fläche ab, so erhält man einen Kreisausschnitt, dessen Radius $= l$. Nennt man den Winkel dieses Ausschnitts, welcher offenbar gleich der erwähnten Summe der um die Spitze T liegenden unendlich kleinen Winkel ist, φ, so muss sein: $l^2\pi \cdot \frac{\varphi}{360} = r'\pi l$,

woraus $\varphi = 360 \cdot \frac{r'}{l'}$, oder für r' und l ihre Werke gesetzt:

$\varphi = 360 \cdot \frac{r \cos \beta}{r \cot \beta}$, d. i.

$$\varphi = 360^0 \cdot \sin \beta.$$

Um die tägliche scheinbare Drehung der Schwingungsebene für einen bestimmten Ort der Erde zu wissen, braucht man also nur 360^0 mit dem Sinus der Breite zu multipliciren Für die stündliche Abweichung ψ hat man:

$$\psi = 15^0 \cdot \sin \beta.$$

Für Hamburg z. B., dessen Breite $\beta = 53^0\,33'\,7''$ ist, muss die stündliche Abweichung $12^0\,3'\,54''$ und die tägliche, wenn das Pendel so lange in Schwingungen erhalten wird, $289^0\,26'\,24''$ betragen.

Dieselbe Erscheinung muss offenbar eintreten, wenn das Pendel, statt in einer Meridianebene, wie wir hier der leichtern Vorstellung halber angenommen haben, seine Schwingungen zu beginnen, in einer andern, z. B. in der von Nordosten nach Südwesten gehenden Vertical - Ebene seine Schwingungen anfängt.

Einundzwanzigstes Buch.

Vom Stosse der Körper.

264.

Wenn ein Körper in Bewegung ist, so besitzt er, vermöge seiner Eigenschaft, in dieser Bewegung zu beharren, eine Kraft P, mit welcher er auf einen Körper, den er auf seiner Bahn trifft, durch einen Stoss (choc) eine gewisse Wirkung ausüben wird. Umgekehrt wird auch der getroffene Körper eine gleiche entgegengesetzte Wirkung auf den treffenden Körper ausüben (§ 258). Es entsteht deshalb die Frage nach einem bestimmten Maasse, mit welchem wir die relative Grösse (Intensitäten) solcher nur eine sehr kurze Zeit wirkenden sogenannten Stosskräfte messen, sie in bestimmte Zahlen ausdrücken und mit einander vergleichen können; denn es ist einleuchtend, dass diese Art (Momentan-) Kräfte nicht wie die stetig wirkenden Druck- oder Zugkräfte mit ruhenden Gewichten gemessen und verglichen werden können, dass vielmehr hier ihre Wirkungen nicht allein von der Masse (Gewicht) des stossenden Körpers, sondern auch von der Geschwindigkeit und von den physischen Eigenschaften (Elasticität &c.) abhängen werden. Durch Stosskräfte (Schläge) kann man einen Nagel in einen Stein treiben, was durch ein aufgelegtes Gewicht nicht gelingen würde.

265.

Um nun dies fragliche Maass zu finden, überlege man erst, dass, wenn ein ganz freier oder, wie man auch zu sagen pflegt, ein bloss beharrlicher Körper, d. h. ein solcher, welcher der ihn in Bewegung setzenden Kraft keinen andern Widerstand, als bloss sein Beharrungsvermögen entgegensetzt (bei welchem man also von der Reibung, vom Widerstande der Luft, von der Anziehungskraft der Erde &c. abstrahirt), durch eine Stosskraft in Bewegung gesetzt wird, er sich nothwendig nach der Richtung der Kraft in grader Linie und gleichförmig bewegen muss. Ferner, obgleich wir das eigentliche Wesen der Kräfte nicht kennen, diese uns nur durch ihre hervorgebrachten Wirkungen, wofür wir hier die Geschwindigkeiten nehmen, bekannt werden, so müssen wir doch, nach der sich uns aufdrängenden Vorstellung: dass, in rein dynamischer Hinsicht, eine 2, 3, ... n mal grössere Wirkung auch eine 2, 3, ... n mal grössere Ursache voraussetzt, annehmen: dass, eben so, wie bei constant wirkenden Kräften (§ 221, Anmerkung), auch die Grössen (Intensitäten) der Stosskräfte sich zu einander verhalten, wie die Geschwindigkeiten, welche sie derselben Masse ertheilen.*) Sind nun aber die durch Stosskräfte in Bewegung gesetzten Massen nicht gleich gross, so muss offenbar dies Element beim Maass der Stosskraft noch mit in Betracht gezogen werden; denn es ist klar: dass, wenn einer 2, 3, ... n mal grössern Masse dieselbe Geschwindigkeit ertheilt werden soll, wie der einfachen Masse, die Stosskraft auch 2, 3, ... n mal grösser sein muss. Man kann sich ja die n mal grössere Masse in n gleiche Theile getheilt denken und auf jeden Theil die einfache Kraft wirken lassen.

*) Dass die Kräfte den erzeugten Geschwindigkeiten proportional sein müssen, ergiebt sich auch daraus, dass das Beharrungsvermögen eines sich bewegenden Körpers in jedem Augenblick dasselbe ist, als da er den Zustand der Ruhe verliess. Wirkt also auf den sich bewegenden Körper dieselbe Kraft noch einmal, so wächst seine Geschwindigkeit um grade so viel, als wenn er in Ruhe gewesen wäre. Denkt man sich also beide gleichen Kräfte gleichzeitig auf den ruhenden Körper wirkend, so ist klar, dass die doppelte Kraft auch die doppelte Geschwindigkeit erzeugt.

266.

Nehmen wir also die Grösse der Stosskraft zur Einheit, welche der Masse $=1$ (z. B. 1 ℔) die Geschwindigkeit $=1$ (z. B. 1 Fuss) ertheilt, so muss die Stosskraft, welche einer Masse von 6 ℔ eine Geschwindigkeit von 30 Fuss einprägt, $6 \cdot 30$mal grösser, mithin $=180$ sein. Denn wegen der 6mal grössern Masse muss bei derselben Geschwindigkeit $(=1)$ die Stosskraft $\frac{6}{1}$mal grösser sein; da nun aber die Geschwindigkeit dieser sechsmal grössern Masse nicht $=1$, sondern 30mal grösser sein soll, so muss die schon $\frac{6}{1}$mal grössere Stosskraft noch $\frac{30}{1}$mal grösser, daher $=\frac{6}{1} \cdot \frac{30}{1}=180$ sein.

Ist also allgemein die durch eine Stosskraft in Bewegung gesetzte Masse $=m$ und die ihr eingeprägte Geschwindigkeit $=c$, so können wir das Product aus der Masse in ihre Geschwindigkeit, natürlich beide als unbenannte Zahlen betrachtet, als die Kraft des in Bewegung befindlichen Körpers und als das Maass (Wirkung) der Stosskraft P nehmen, so dass also:

$$P=mc.$$

Dieses Product mc wird das dynamische Moment oder Bewegungsmoment genannt. Wo keine Verwechselung entstehen kann, sagt man kurz: Moment (§ 62).

267.

Nachdem wir nun ein Maass für die Stosskräfte gefunden haben, können wir jetzt zur eigentlichen Theorie des Stosses übergehen.

Der Stoss zweier Körper auf einander, es möge sich nur der eine oder beide bewegen, heisst erstens central, wenn die Richtung des Stosses und die der Bewegung durch beider Schwerpuncte geht, sonst excentrisch; zweitens grade, wenn beim Zusammenstoss die Berührungsflächen senkrecht auf der Richtung der Bewegung sind, wenn nicht, so heisst er schief.

Der Einfachheit halber betrachten wir hier zunächst nur den centralen und graden Stoss, wobei nur die progressive Bewegung in Betracht kommt. Beim excentrischen und schiefen Stoss müsste ausserdem noch die rotirende Bewegung

(§ 234) berücksichtigt und deshalb die Stosskraft decomponirt werden. Bei Kugeln von gleichmässiger Dichtigkeit, die wir in den folgenden Beispielen annehmen, ist der centrale Stoss von selbst auch ein grader. Ferner beschränken wir die Theorie des Stosses auf vollkommen unelastische und vollkommen elastische Körper, denn wenn solche auch nur in der Idee existiren und in der Natur nicht nachgewiesen werden könnten, so müsste doch die Theorie der stossenden Körper, welche nur einen gewissen Grad der Elasticität haben, auf erstere basirt werden.

1. Stoss vollkommen unelastischer Körper.*)

268.

Frage. Zwei bloss beharrliche Kugeln stossen in entgegengesetzter Richtung central gegen einander. Die eine hat eine Masse von 6 ℔. mit 20 Fuss Geschwindigkeit, die andere eine Masse von 3 ℔. mit 40 Fuss Geschwindigkeit. Was wird das Resultat nach dem Stosse sein?

Antwort. Da hier die (dynamischen) Momente einander gleich, aber entgegengesetzt sind, $6 \cdot 20 = 3 \cdot 40$, so müssen es auch die Stosskräfte sein, die sich also aufheben oder eine Resultante $= 0$ haben (§ 266).

Anmerkung. Nach dem Gesetze der Beharrlichkeit wirken beide Kugeln wohl eine kurze Zeit auf einander und können sich gegenseitig auch etwas eindrücken, weil sie aber vollkommen unelastisch gedacht werden, so können sie ihre Form nicht wieder herstellen oder sich von einander trennen. Beide Massen befinden sich, an einander liegend, im Zustande der Ruhe und bilden Eine Masse.

269.

Frage. Eine Kugel von 12 ℔. mit 100 Fuss Geschwindigkeit stösst central gegen eine ruhende Kugel von ebenfalls 12 ℔. Was wird das Resultat nach dem Stosse sein?

*) Auf Veranlassung der Societät der Wissenschaften in London wurde zuerst (1668) die richtige Theorie des Stosses von dreien ihrer Mitglieder, Wallis, Wreen und Huyghens, gleichzeitig aufgestellt.

Antwort. Statt des Moments der sich bewegenden Kugel kann man sich dieselbe in jedem Puncte ihrer Bahn, also auch da, wo sie die ruhende trifft, ebenfalls in augenblicklicher Ruhe und dafür sogleich die Stosskraft wieder wirkend denken, weil diese ihr ja dieselbe Geschwindigkeit wieder einprägen würde. Da diese Stosskraft nun aber die doppelte Masse (24 ℔.) in Bewegung setzt, so können beide Massen, weil unelastisch, jetzt zu Einer verbunden, nur die halbe gemeinschaftliche Geschwindigkeit $= 50$ Fuss haben.

270.



Aufgabe. Zwei Kugeln A und B, deren Massen und Geschwindigkeiten m, c und m', c' sind, bewegen sich desselben Sinnes. Es ist $c > c'$, so dass A auf B stossen muss. Was wird das Resultat nach dem Stosse sein?

Auflösung 1. Stellt man sich vor, dass beide Kugeln in dem Augenblick, wo sie sich berühren und nur Eine Masse bilden, senkrecht gegen einen Widerstand DE treffen, so muss die Wirkung (choc) auf diesen Widerstand offenbar gleich der Summe beider sein.*) Bezeichnen wir also die fragliche gemeinschaftliche Geschwindigkeit der zu Einer verbundenen Massen $m+m'$ mit x, so hat man, weil das Moment dieser Masse $m+m'$ gleich der Summe beider Momente sein muss, $(m+m')\,x = mc + m'c'$, woraus:

$$x = \frac{mc + m'c'}{m+m'} \ldots\ldots\ldots (1)$$

Auflösung 2. In dem Augenblick, wo die Kugel A auf B stösst, kann man beide als eine einzige Masse $m+m'$ in augenblicklicher Ruhe denken und annehmen, dass jetzt erst beide Stösse gleichzeitig auf diese Masse wirken. Der Stoss (Wirkung) auf einen Widerstand DE muss dann offenbar

---

*) Nämlich grade so, als wenn beide sich berührenden Kugeln statt hinter einander, neben einander, gleichzeitig auf den Widerstand DE träfen. Hieraus erklärt sich auch die grössere Wirkung der sogenannten glatten Lagen, d. h. der gleichzeitig treffenden Kugeln.

derselbe, mithin die Geschwindigkeit x der Masse $m+m'$ so gross sein, dass: $(m+m')\ x=mc+m'c'$ &c.

Auflösung 3. Der Körper A wirkt, kraft seines Beharrungsvermögens, eine wenn auch noch so kleine Zeit auf den Körper B und vergrössert dessen Geschwindigkeit, also auch dessen Moment. Der Körper B reagirt, ebenfalls wegen seines Beharrungsvermögens, gegen den Körper A und verringert dessen Geschwindigkeit und Moment. Ist nun x die gemeinschaftliche Geschwindigkeit beider in Berührung bleibender Körper, so ist jetzt das Moment des Körpers $B=m'x$, mithin sein Gewinn an Moment $=m'x-m'c'$. Das Moment der Kugel A ist jetzt $=mx$, also ihr Verlust $=mc-mx$. Weil nun Wirkung und Gegenwirkung, also auch Gewinn und Verlust gleich sind, so folgt auch aus diesem evidenten Gesetze (§ 258), dass $m'x-m'c'=mc-mx$, woraus sich wiederum x wie vorhin ergiebt.

Anmerkung. Will man die wirkliche Grösse G des Gewinnes und Verlustes wissen, so muss man den für x gefundenen Werth in $m'x-m'c'$ und $mc-mx$ substituiren und hat dann für den Gewinn des Körpers B:

$$G=\frac{mm'(c-c')}{m+m'}\ldots\ldots..(2)$$

Dasselbe Resultat erhält man für den Verlust des Körpers A.

Das § 258 erwähnte Naturgesetz folgt also auch aus der Rechnung und man wird bemerken, dass diese Folgerung keinen logischen Zirkel enthält.

271.

Beispiel 1. Ist $m=20$ ℔., $c=100'$; $m'=30$ ℔., $c'=50'$, so wäre $x=70'$ und der Verlust und Gewinn $G=600$.

Beispiel 2. Wäre $m=20$ ℔., $c=100'$; $m'=30$ ℔. und $c'=0$, so wäre die gemeinsame Geschwindigkeit $x=40'$, Verlust und Gewinn $G=1200$.

Anmerkung 1. Wäre $c'=0$ und m' nicht unendlich gross, so kann x nicht $=0$ werden. Stösst ein Pfefferkorn an die Erde, so muss dieselbe es spüren.

Anmerkung 2. Bewegen sich beide Körper gegen einander, so ist, wie bei entgegengesetzten Kräften, wenn das eine Moment mc als positiv betrachtet wird, das andere $m'c'$ in

Formel (1) als negativ zu nehmen, was auch erreicht wird, indem man c' negativ nimmt.

Beispiel 3. Es sei $m = 20$ ℔., $c = 100'$; $m' = 30$ ℔., $c' = -50'$, dann ist $x = 10'$. Verlust und Gewinn $G = 1800$. Der Körper B hatte vor dem Stosse ein negatives Moment $= -1500$. Da aber jetzt sein Moment positiv $= 300$ ist, so hat er im positiven Sinne wirklich $300 - (-1500) = 1800$ gewonnen.

Beispiel 4. Wäre $m = 20$ ℔., $c = 100'$; $m' = 30$ ℔., $c' = -80'$, so wäre $x = -8'$. Die jetzt verbundene Masse bewegt sich nach der negativen Seite. Verlust und Gewinn sind hier, $= 2160$.

2. Stoss vollkommen elastischer Körper.

272.

Prämissen. Eine vollkommen unelastische Kugel stosse mit einer Geschwindigkeit c central gegen eine vollkommen elastische aber absolut feste Kugel, alsdann wird die Form dieser Kugel, je nach der Grösse des Moments der stossenden, mehr oder weniger geändert. Diese Aenderung (Zusammendrückung) dauert so lange, bis die stossende Kugel mit abnehmender Geschwindigkeit ganz zur Ruhe gekommen und folglich keine Pressung mehr auf die feste elastische Kugel ausübt. In diesem Augenblick aber beginnt sofort die auf ihr Maximum gestiegene Kraft der Elasticität zu wirken, welche die aus ihrer Lage gekommenen Theilchen wieder in ihre anfängliche Lage zurückschnellt. Ist die Kugel nun vollkommen elastisch, so muss sie auch genau ihre vorige Gestalt wieder annehmen und deshalb die Schnellkraft (weil, so lange die Formveränderung dauerte, immer Wirkung und Gegenwirkung gleich wären) die stossende Kugel mit derselben Geschwindigkeit c in entgegengesetzter Richtung wieder zurückschnellen, denn die bis zum Maximum gesteigerte Schnellkraft nimmt offenbar in demselben Verhältniss bis zu Null ab, als sie vorhin von Null bis zum Maximum zunahm.

Ist umgekehrt die stossende Kugel vollkommen elastisch und die gestossene vollkommen unelastisch und absolut fest, so muss nach demselben Raisonnement offenbar dieselbe Erscheinung eintreten. Die stossende elastische Kugel ändert, während einer kurzen Zeit, ihre Form so lange, bis die stets gewachsene Schnellkraft keine weitere Aenderung zulässt. In

diesem Augenblick stösst sich diese Kugel, die feste als Stützpunct benutzend, mit der ihr inwohnenden vom Maximum bis zu Null abnehmenden Schnellkraft und folglich mit derselben Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung wieder ab, grade so, als wenn sie durch eine von aussen wirkende Kraft zurückgestossen wäre. Ob man in einem Boote stehend, sich selbst vom Ufer abstösst, oder mit einer gleichen Kraft abgestossen wird, der Erfolg bleibt derselbe.

Mittelst dieser Prämissen können wir nun die allgemeine Aufgabe über den Stoss vollkommen elastischer Körper lösen.

273.

Aufgabe. Zwei bloss beharrliche elastische Kugeln A und B, deren Massen und Geschwindigkeiten m, c und m', c' sind, bewegen sich desselben Sinns und es ist $c > c'$. Was wird das Resultat nach dem Stosse sein?

Auflösung. Wegen ihres Beharrungsvermögens wirken beide Körper beim Zusammenstossen eine kurze Zeit auf einander ein, wodurch offenbar die Geschwindigkeit und Form beider geändert wird. Hier muss nun ein Augenblick eintreten, wo die bis zum Maximum gewachsene Schnellkraft beider Körper keine weitere Form-, also auch keine weitere Geschwindigkeitsänderung gestattet. In diesem nur augenblicklichen Zustande haben beide Körper dieselbe gemeinschaftliche Geschwindigkeit x; sie drücken nicht mehr auf einander, sie bilden jetzt eine einzige Masse $m+m'$, deren Moment, wenn dieser augenblickliche Zustand der Körper derselbe bleiben könnte, dann auch ebenso, wie bei unelastischen Körpern gleich der Summe beider Momente wäre. Deshalb hat man auch ganz wie § 270 für diese augenblickliche gemeinsame Geschwindigkeit:

$$x = \frac{mc + m'c'}{m + m'}$$

es hat mithin die Kugel B die Geschwindigkeit $x - c'$ gewonnen und die Kugel A die Geschwindigkeit $c - x$ verloren. Die Körper können nun aber, wegen ihrer zum Maximum gesteigerten Schnellkraft, nicht an einander bleiben. Sie reagiren wieder gegen einander und stossen einander ab, grade so, als wenn zwischen ihnen eine tangirende feste Ebene wäre, die

ihnen als Stützpunct dient. Da nun eines jeden Körpers Schnellkraft, mit welcher er sich von dieser fingirten Ebene abstösst, der erlittenen Zusammendrückung gleich ist, d. h. ebenso vom Maximum bis zu Null wieder abnimmt, wie sie vorher von Null bis zu diesem Maximum zunahm, so muss der gestossene Körper B nochmals wieder $x-c'$ an Geschwindigkeit gewinnen und A nochmals $c-x$ verlieren. Bezeichnen wir demnach die Geschwindigkeiten der Körper A und B nach dem Stosse mit u und u', so hat man:

$$u = c - 2(c-x) = 2x - c$$
$$u' = c' + 2(x-c') = 2x - c'$$

und wenn man hierin den Werth von x substituirt:

$$u = \frac{2m'c' + (m-m')c}{m+m'} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$u' = \frac{2mc - (m-m')c'}{m+m'} \quad \ldots\ldots (2)$$

Für den Gewinn und Verlust an dynamischem Moment beider Körper ist hier:

$$G = \frac{2mm'(c-c')}{m+m'} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

mithin, wie, wegen der zweimaligen gleichen Wirkung und Gegenwirkung, vorauszusehen, just doppelt so gross, als bei unelastischen Körpern.

Anmerkung. Ist die Kugel B in Ruhe, so braucht man in vorstehenden allgemeinen Formeln nur $c'=0$ zu setzen, und wenn sie sich in entgegengesetzter Richtung bewegt, c' nur negativ zu nehmen.

274.

Aufgabe. Was wird der Erfolg nach dem Stosse sein, wenn:
1) $m = 2$ ℔, $c = 10'$; $m' = 1$ ℔, $c' = 8'$.
2) $m = 1$ ℔, $c = 10'$; $m' = 2$ ℔, $c' = 8'$.
3) $m' = m$; $c = 100'$, $c' = 50'$.
4) $m' = m$ und $c' = 0$, $c = 100'$.
5) $m' = \frac{1}{3}m$ und $c' = 0$, $c = 90'$.
6) $m' = m$ und $c' = -c$.
7) $m = 3m'$ und $c' = -c$.

Antwort. Man findet nach den Formeln (1) und (2), dass:

1) $u = 8\frac{2}{3}'$, $u' = 10\frac{2}{3}'$, $G = 2\frac{2}{3}$.

2) $u = 7\frac{1}{3}'$, $u' = 9\frac{1}{3}'$, $G = 2\frac{2}{3}$.

3) für $m' = m$ ist $u = c'$ und $u' = c$. Bei gleichen Massen und gleicher Richtung verwechseln die Mobile ihre Geschwindigkeiten und gehen in gleicher Richtung weiter.

4) $u = 0$ und $u' = c$. Die stossende Kugel bleibt liegen, die gestossene geht mit der Geschwindigkeit der ersteren weiter.

5) $u = \frac{1}{3}c$ und $u' = \frac{4}{3}c$.

6) $u = -c$ und $u' = c$, d. h. nach dem Stosse gehen die Mobile mit derselben Geschwindigkeit wieder zurück.

7) $u = 0$ und $u' = 2c$, d. h. bei gleichen entgegengesetzten Geschwindigkeiten kommt die dreifache Masse in Ruhe und die andere geht mit der doppelten Geschwindigkeit zurück.

275.

Frage. Es sind beliebig viele gleiche elastische Kugeln an gleich langen Fäden so aufgehängt, dass sie sich tangiren, und ihre Mittelpuncte in grader Linie liegen.

Was wird der Erfolg sein, wenn an einem Ende eine Kugel so aus ihrer Gleichgewichtslage gebracht wird, dass sie, losgelassen, central gegen die ganze Reihe stossen muss?

Antwort Es muss die Kugel am andern Ende mit der, durch die Fallhöhe h bestimmten Geschwindigkeit $= \sqrt{2gh}$ [§ 223, (5)] abspringen und alle übrigen Kugeln liegen bleiben. Denn zufolge § 274, Aufg. 4 bleibt die 1ste fallende Kugel liegen, indem sie der zweiten ihre Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ mittheilt. Die 2te Kugel bleibt ebenfalls liegen, indem sie der 3ten ihre Geschwindigkeit mittheilt &c.

Bringt man an einem Ende die ersten zwei (drei, vier,..) sich tangirenden Kugeln aus ihrer Gleichgewichtslage und lässt sie central gegen die ganze Reihe stossen, so müssen am andern Ende die letzten zwei (drei, vier,..) Kugeln gleichzeitig abspringen. Denn die zweite der beiden ersten Kugeln stösst zuerst und bleibt liegen, erhält aber in demselben Augenblick wieder einen Stoss von der ersten &c.*) Lässt man die

*) Man kann sich eine sogenannnte Percussionsmaschine aus nur wenig kostenden Kartätschenkugeln, die sehr elastisch sind, herstellen, um welche man dünne Fäden befestigt und sie dann alle, sich tangirend, an eine verticale Wand aufhängt.

beiden Endkugeln unter verschiedenen Elevationswinkel fallen, so vertauschen sie ihre Geschwindigkeiten.

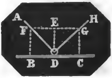
276.

Frage. Es liegen die Mittelpuncte von hundert sich tangirenden Kugeln in einer graden Linie. Die Masse einer jeden folgenden Kugel ist immer die Hälfte der vorhergehenden, und die erste grösste Kugel von der Masse $m = 1$ stösst mit der Geschwindigkeit $c = 1'$ central gegen die ganze Reihe. Mit welcher Geschwindigkeit v wird die letzte, kleinste Kugel abspringen?

Antwort. Zufolge § 274, Aufg. 5, erhält die zweite Kugel vierdrittel von der Geschwindigkeit der ersten, also weil $c = 1$ ist, $\frac{4}{3}'$ Geschwindigkeit. Von dieser Geschwindigkeit erhält die dritte Kugel wieder vierdrittel, also $(\frac{4}{3})^2$ &c. Die Geschwindigkeit der letzten Kugel ist also $v = (\frac{4}{3})^{99}$, mithin mehr als 2338467000000 Fuss, mehr als 99000000 Meilen. Die letzte Kugel würde also noch keine $\frac{1}{4}$ Secunde gebrauchen, um den Weg von der Erde zur Sonne (21000000 Meilen) zu durchlaufen. Dieses Experiment findet aber nur in der Idee Statt. Denn wäre der Durchmesser der kleinsten Kugel auch nur eine Linie gross, so müsste, weil die Massen den Volumen proportional sind, der Durchmesser der grössten Kugel $= (\sqrt[3]{2})^{99}$ Linien, also mehr als doppelt so gross, als der Erddurchmesser sein (Geometrie § 180). Huyghens führt dies Beispiel in seinen Werken an.

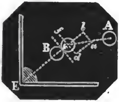
277.

Um schliesslich noch den Fall eines schiefen Stosses zu betrachten, sei AD die Richtung, in welcher eine elastische Kugel auf eine feste Ebene BC stösst. Die Linie FD stelle ihre Geschwindigkeit dar. Diese Geschwindigkeit kann man in D in die beiden ED und BD zerlegen, erstere senkrecht auf der Ebene und letztere in der Richtung derselben, und zwar in der durch den sogenannten Einfallswinkel EDF bestimmten Ebene. Nach der Richtung BD trifft die Kugel kein Hinderniss, nach der Richtung ED aber leistet die Ebene Widerstand, und die Kugel stösst sich, vermöge ihrer Elastici-



tät, mit derselben Geschwindigkeit DE von ihr wieder ab. Aus den beiden Geschwindigkeiten DE und DC (=BD) resultirt die Geschwindigkeit DG, mit welcher die Kugel nach der Richtung DH fortgeht. Unter Voraussetzung vollkommener Elasticität und von der Reibung abstrahirt, müsste hier, ebenso wie in der Optik und Akustik, der sogenannte Zurückwerfungswinkel EDG dem Einfallswinkel EDF gleich sein.

278.



Aufgabe. Die Richtung anzugeben, nach welcher die Kugel A gestossen werden muss, damit sie die gleich grosse Kugel B nach dem Punct E treibt.

Auflösung. Man ziehe von E die Linie Eb durch den Mittelpunct der Kugel B, denke sich am Durchschnittspunct ihrer Oberfläche, wo die Kugel A sie trifft, eine Tangentialebene und mit dieser (weil man die Kugel als auf ihren Mittelpunct reducirt denken muss) noch eine Parallelebene df durch den Mittelpunct c gelegt. Die Stosskraft ac denke man sich, wie in § 277, in bc und dc zerlegt. Mit ersterer Kraft bc, wenn sie allein wirksam wäre, würde die Kugel A die Kugel B nach E treiben, selbst aber liegen bleiben (§ 274, Aufg. 4), weil aber die Kraft dc auf den Stoss keinen Einfluss hat und noch wirksam bleibt, so geht die Kugel A nach der Richtung df fort.

Zweiundzwanzigstes Buch.

Von der gradlinigen Bewegung der Massen durch constant wirkende Kräfte.

279.



Es liege ein Körper auf einer horizontalen Ebene, dann ist sein Gewicht durch den Widerstand der Ebene aufgehoben und er würde (von der Reibung, Widerstand der Luft, Adhäsion &c. abstrahirt) einer Kraft, die ihn nach horizontaler Richtung bewegt, bloss seine Beharrlichkeit entgegensetzen. Eine Masse, welche sich in einem solchen Zustande befindet, dass sie einer sie bewegenden Kraft mit keiner andern Kraft, wie z. B. Reibung, Gewicht &c., sondern bloss mit ihrer Beharrlichkeit entgegenwirkt, heisst, wie schon § 265 erwähnt, eine *bloss beharrliche Masse*.

Wirkt nun auf eine solche bloss beharrliche Masse (hier Beispiels halber auf die, auf der unendlich gedachten horizontalen Ebene liegende) eine durch den *Schwerpunct* gerichtete Stosskraft, welche der Masse eine gewisse Geschwindigkeit einprägt, so wird dieselbe sich, wie bereits bekannt, vermöge ihrer Eigenschaft, in diesem Zustande zu beharren, gleichmässig in alle Ewigkeit nach der Richtung der Stosskraft fortbewegen, nämlich alle Puncte parallel mit dem Schwerpunct.

Wirkt aber, statt einer Stosskraft, eine Druck- oder Zugkraft fortwährend auf diese bloss beharrlliche Masse, so muss dieselbe offenbar eine beschleunigte Bewegung annehmen, weshalb man auch wohl die hier stetig wirkende Kraft die beschleunigende Kraft nennt.

280.

Prämisse. Man stelle sich nun, der leichtern Auffassung halber, vor: die auf der horizontalen Ebene liegende, bloss beharrliche Masse werde durch eine stetig und immer mit derselben Intensität wirkende Anziehungskraft eines Planeten nach horizontaler Richtung angezogen. Wäre die Anziehungskraft dieses fingirten Planeten eben so gross, als die Anziehungskraft der Erde, so würde die bloss beharrliche Masse nach horizontaler Richtung ganz dieselbe beschleunigte Bewegung annehmen, wie beim freien verticalen Fallen. Auch ist klar, dass sie, durch eine verticale Ebene in ihrer horizontalen Bewegung gehemmt, eben so stark (mit demselben Gewicht) auf diese verticale Ebene drücken würde, als sie auf die horizontale Ebene drückt.

Ferner ist nun klar, dass, wenn die Anziehungskraft des fingirten Planeten m mal grösser wäre, als die Anziehungskraft der Erde, dann auch die Beschleunigung der bewegten freien Masse nach horizontaler Richtung m mal so gross sein würde, als nach verticaler Richtung.

Statt einer beschleunigenden Anziehungskraft kann man sich auch eine beständig mit gleicher Intensität wirkende und folglich gleichförmig beschleunigende Druckkraft (z. B. Dampfkraft) denken, die auf eine bloss beharrliche Masse wirkt. Die Grösse dieser Druckkraft kann man immer durch das Gewicht ausdrücken, welches mittelst einer Schnur über eine gehörig angebrachte Leitrolle, der Druckkraft entgegenwirkend, ihr das Gleichgewicht hält und folglich die sonst vor sich gehende Bewegung hemmt.

Angenommen, das Quantum der auf der horizontalen Ebene liegenden, bloss beharrlichen Masse sei in Gewicht ausgedrückt: $M = 100$ ℔. und der nach horizontaler Richtung darauf Statt findende constante Druck (z. B. Dampfkraft) P auch $= 100$ ℔., so würde die Beschleunigung, welche diese constante Druckkraft $P = 100$ ℔. erzeugt, ganz dieselbe, wie

beim freien Fall, mithin $g = 31\frac{1}{4}$ Fuss sein. Wäre die constante Druckkraft $P = 200$ ℔, so würde die Beschleunigung offenbar mal so gross, $= \frac{200}{100} \cdot g$ sein. Wäre $P = 10$ ℔, so wäre die Beschleunigung $= \frac{10}{100} \cdot g = 3',125$ &c. Die Beschleunigung einer sich nach grader Linie bewegenden bloss beharrlichen Masse M wächst also der Grösse der constant bewegenden Kraft P proportional und ist $= \frac{P}{M} g$, wo P und M durch Gewichte gemessen sind, die Druckkraft P aber keine Masse ist.

Anmerkung. Wäre eine zu bewegende Masse M nicht eine bloss beharrliche (nicht ganz freie), so braucht man offenbar nur die etwaigen Hindernisse, wie Reibung &c., ebenfalls in Gewicht ausgedrückt, von der bewegenden Kraft P zu subtrahiren, um die Beschleunigung zu erhalten. Sollte z. B. eine Masse $M = 100$ ℔ durch eine constant wirkende Druckkraft von $P = 101$ ℔ vertical in die Höhe bewegt werden, so wäre die eigentlich bewegende Kraft offenbar nur $= 1$ ℔ und die Beschleunigung nur $= \frac{1}{100} g$.

281.

Bezeichnen wir also die Geschwindigkeit der durch die constante Druckkraft P bewegten, bloss beharrlichen Masse M nach Verfluss von t Secunden mit v und den in dieser Zeit durchlaufenen Raum mit s, so haben wir hier wieder, indem wir nur $\frac{P}{M} g$ statt k setzen, die schon § 217 entwickelten beiden Bewegungsgleichungen:

$$v = \frac{P}{M} g t \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{M} g t^2 \ldots\ldots\ldots (2)$$

Beispiel 1. Eine constante Kraft $P = 100$ ℔ wirkt auf eine bloss beharrliche Masse $M = 1000$ ℔ während $t = 20$ Secunden, welche Geschwindigkeit v erlangt diese Masse und welchen Raum s hat ihr sich nach grader Linie bewegender Schwerpunct nach $t = 20$ Secunden zurückgelegt?

Antwort. Es ist $v = 62\frac{1}{2}'$ und $s = 625'$.

Beispiel 2. Wie gross muss die bewegende constante Kraft P sein, um in einer bloss beharrlichen Masse $M = 1000$ ℔

eine Geschwindigkeit von $v=62\frac{1}{2}'$ zu erzeugen und dabei die Masse durch einen Raum $s=625'$ zu treiben, und in welcher Zeit findet dies Statt?

Antwort. Die Elimination von t aus (1) und (2) giebt:

$$P=\frac{Mv^2}{2gs} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Für das angenommene Zahlenbeispiel findet man hier natürlich wieder $P=100$ ℔.

Um t zu finden, muss man aus (1) und (2) P eliminiren und hat dann:

$$t=\frac{2s}{v} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Dass sich hier M und g mit eliminiren, ist (nach § 217) natürlich, weil bei allen gleichförmig beschleunigten Bewegungen, welche Grösse die constante Kraft und die Masse auch haben möge, doch immer, wie beim freien Fall auf jedem Planeten, der doppelte Raum durch die Endgeschwindigkeit dividirt, die Zeit t giebt. Dies folgt auch aus den Formeln (1) und (2), § 217, indem man die Beschleunigung k eliminirt.

282.

Aufgabe. Eine bloss beharrliche Masse $M=8000$ ℔ (z. B. eine Locomotive auf horizontalen Schienen) habe eine Geschwindigkeit $c=60'$ erlangt und werde nun (nach Absperrung des Dampfes) sich selber überlassen. Ihrem Beharrungsvermögen, mit dieser Geschwindigkeit von selbst weiter zu gehen, wirke jetzt eine constante Kraft $P=40$ ℔ (z. B. die Reibung) entgegen, welche Geschwindigkeit v wird sie noch nach $t=100$ Secunden haben und welchen Weg wird sie in dieser Zeit durchlaufen?

Auflösung. Da hier die Kraft P gleichförmig verzögernd wirkt, so hat man durch gleiche Schlüsse, wie in § 219:

$$v=c-\frac{P}{M}gt \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$s=ct-\frac{1}{2}\cdot\frac{P}{M}gt^2 \ldots\ldots\ldots (2)$$

Für das angenommene Zahlenbeispiel wäre $v=44\frac{3}{8}'$ und $s=3218\frac{3}{4}'$.

283.

Aufgabe. Einer bloss beharrlichen Masse $=$ M mit der Geschwindigkeit $= c$ wirkt eine constante Kraft $=$ P entgegen Welchen Weg s wird dieselbe noch durchlaufen, bevor sie zur Ruhe kommt?

Auflösung. In Formel (1) (§ 282) wird $v=0$, sobald $\frac{P}{M} g t = c$ wird, mithin nach $t=\frac{Mc}{Pg}$ Secunden und man hat für den zurückgelegten Weg, indem wir diesen Werth von t in Formel (2) substituiren:

$$s=\frac{Mc^2}{2Pg} \text{ .... } (3)$$

In dieser für die Natur-Philosophie und Technik sehr wichtigen Formel liegen die Antworten auf mehre Fragen.

284.

Beispiel. Nachdem eine Locomotive die Geschwindigkeit $c=60'$ erlangt hat, wird die bewegende Kraft abgesperrt. Wie weit wird sie noch fortlaufen, wenn der Reibungscoefficient nach gewöhnlicher Annahme $f=\frac{1}{180}$ ist und von dem Widerstande der Luft abstrahirt wird?

Antwort. Ist M die Masse der Locomotive, so ist die ihrem Beharrungsvermögen entgegenwirkende constante Kraft $P = fM$, daher nach Formel (3): $s=11520'$.

285.

Aufgabe. Wie gross ist die constante Kraft P (z. B. die Reibung oder ein anderer beständig gleicher Widerstand), welche eine bloss beharrliche Masse M (z. B. $=$ 100 ℔.) mit der Geschwindigkeit c (z. B. $=20'$) nur noch den Raum s (z. B. $=8'$) durchlaufen lässt?

Antwort. Aus Formel (3) (§ 283) folgt einfach:

$$P=\frac{M}{2gs}\cdot c^2.$$

Für das gewählte Zahlenbeispiel wäre $P=80$ ℔.

286.

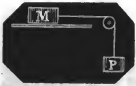
Beispiel. Ein Rammbär, dessen Masse $m = 600$ ℔., fällt von der Höhe $h = 6'$ auf einen einzurammenden Pfahl, dessen Masse $m' = 400$ ℔., und treibt denselben in 20 Schlägen um 2 Zoll, also mit dem letzten Schlage gewiss nicht mehr als um $s = \frac{1}{10}''$ in die Erde ein. Welches Gewicht P kann der Pfahl, ohne tiefer einzusinken, tragen, wenn angenommen wird, dass der Widerstand des Bodens auf einer so kleinen Strecke, von $s = 0{,}1$ Zoll, immer derselbe (constant) ist und dass Rammklotz und Pfahl unelastisch sind.

Auflösung. Die Masse m stösst mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ auf die Masse m' [§ 223, (5)]. Beide verbundene Massen haben also die gemeinsame Geschwindigkeit $c = \frac{m\sqrt{2gh}}{m+m'}$ (§ 271, Beispiel 2), welche nicht augenblicklich durch einen Stoss, sondern allmälig durch den constanten Widerstand P der Erde vernichtet wird. Man hat also, indem man in die vorhergehende Gleichung $m + m'$ statt M und $\frac{m\sqrt{2gh}}{m+m'}$ statt c setzt:

$$P = \frac{h}{s} \cdot \frac{m^2}{m+m'}$$

Für das angenommene Zahlenbeispiel würde der Pfahl, ohne tiefer einzudringen, mit $P = 259000$ ℔. belastet werden können, vorausgesetzt jedoch, dass die Bodenbeschaffenheit immer dieselbe bleibt.

287.



Frage. Eine Masse M liegt auf einer horizontalen Ebene und wird von einer andern Masse P mittelst einer Schnur, die über eine gehörig angebrachte Leitrolle läuft, nach horizontaler Richtung gezogen. Was für eine Bewegung muss Statt finden, wenn von der Masse des Seils und allen Widerständen abstrahirt wird?

Antwort. Wären die Massen P und M gleich, z. B. jede $= 100$ ℔., so würde, wenn man das horizontale Ende des Fadens durchschnitte, die Masse $P = 100$ ℔., durch die constant wirkende Anziehungskraft genöthigt, mit der gleichförmigen

Beschleunigung $g = 31\frac{1}{4}'$ frei fallen. Da nun aber die Masse $M = 100$ ℔ an erstere attachirt, mithin durch dieselbe einfache Anziehungskraft der Erde jetzt die doppelte Masse, 200 ℔, zu bewegen, ein stets doppelt so grosses Beharrungsvermögen zu überwinden ist, so kann auch die Beschleunigung jetzt nur halb so gross $= \frac{100}{200} \cdot g$ sein. Denn die Wirkung, welche die Schwerkraft auf die Masse M ausübt, wird ja durch den Widerstand der horizontalen Ebene aufgehoben. Wäre dagegen die mit $P = 100$ ℔ verbundene Masse $M = 100$ ℔ nicht unterstützt, so würden beide mit der Beschleunigung $g = 31\frac{1}{4}'$ fallen. Es wäre in diesem Falle zwar auch die doppelte Masse vorhanden, mithin das Beharrungsvermögen doppelt so gross, dafür dann aber auch die Anziehungskraft mal so gross. Wäre die unterstützte Masse $M = 300$ ℔ und die bewegende Kraft $P = 100$ ℔, mithin die in Bewegung zu setzende Masse $M + P = 400$ ℔, so wäre die Beschleunigung nur $= \frac{100}{400} g$ &c. Man kann sich in diesem Falle auch, um eine klare Vorstellung zu erhalten, die Schwere, als die bewegende Kraft, ganz wegdenken und dafür annehmen, dass beide verbundene bloss beharrliche Massen $M + P$ durch eine constante Druckkraft (z. B. Dampfkraft) gleich dem Gewichte der Masse P in Bewegung gesetzt werden, wodurch dann dieser Fall auf den § 280 zurückgeführt ist.

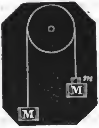
Die Bewegungsgleichungen (1) und (2) (§ 281) werden also in diesem Falle, wo das Gewicht einer Masse P sich selbst und eine damit verbundene, aber unterstützte (bloss beharrliche) Masse in Bewegung setzt:

$$v = \frac{P}{M + P} \cdot gt \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$s = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{P}{M + P} \cdot gt^2 \ldots\ldots (2)$$

Anmerkung. Soll die der bewegenden Masse P entgegenwirkende Reibung, welche offenbar nur eine Eigenschaft der Körper, aber keine Masse ist, mit in Rechnung gezogen werden, so muss man, wenn f der Reibungscoefficient, mithin fM die Reibung ist, im Zähler $P - fM$ statt P setzen.

288.



Aufgabe. An den Enden eines Seils, welches um eine freie Rolle gelegt ist, sind die Massen M und $M+m$ befestigt. Welche Bewegungsgleichungen finden hier Statt, wenn von der Reibung und von der Masse des Seils und der Rolle abstrahirt wird?

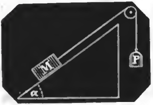
Auflösung. Nur das Gewicht m (die sogenannte Ueberwucht) bringt hier Bewegung hervor. Denn M und M halten sich das Gleichgewicht und wir können annehmen, diese beiden an einander befestigte Massen lägen wie in § 287 auf einer sie stützenden horizontalen Ebene. Die Masse m hat also die Masse $2\,M+m$ zu bewegen und wir haben demnach ganz wie in § 287:

$$v=\frac{m}{2\,M+m}\cdot gt\,........(1)$$

$$s=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{m}{2\,M+m}\cdot gt^2\,....(2)$$

Beispiel. Es sei $M=10$ ℔, $m=0{,}1$ ℔, $t=4''$, dann ist die Endgeschwindigkeit nach 4 Secunden, nämlich $v=\frac{125}{201}'$ und der durchlaufene Raum (Steigen der einen und Sinken der andern Masse) $s=1\frac{49}{201}'$. Könnte man, nach Ende der vierten Secunde, die beschleunigende Kraft m plötzlich entfernen, so würden die steigende und die sinkende Masse M und M kraft ihres Beharrungsvermögens sich gleichförmig bewegen und in jeder der folgenden Secunden einen Weg $=\frac{125}{201}'$ durchlaufen.

289.



Aufgabe. Eine Masse M wird durch eine vertical sinkende Masse P einer schiefen Ebene und parallel mit ihr hinauf gezogen. Wie gross wird die Beschleunigung k sein, wenn die Reibung auf der schiefen Ebene mit berücksichtigt wird.

Auflösung. Zufolge § 89 ist das respective Gewicht der

zu bewegenden Masse $=\frac{h}{l}$ M, der Druck auf die schiefe Ebene $=\frac{b}{l}$ M und die Reibung also $=f\frac{b}{l}$ M, mithin (§ 280 Anm.) die bewegende Kraft $= P-\frac{h}{l}M-f\frac{b}{l}M$ und die zu bewegende Masse $= M+P$, folglich die gesuchte Beschleunigung:*)

$$k=\frac{P-\frac{h}{l}M-f\frac{b}{l}M}{M+P}\cdot g$$

Wäre das respective Gewicht grösser, als das Gewicht P und die Reibung, so würde die gleichförmig beschleunigte Bewegung in entgegengesetzter Richtung erfolgen und es wäre dann die Beschleunigung:**)

$$k=\frac{\frac{h}{l}M-f\frac{b}{l}M-P}{M+P}\cdot g$$

*) Oder auch $k=\frac{P-M\sin\alpha-fM\cos\alpha}{M+P}\cdot g$

**) Oder auch $k=\frac{M\sin\alpha-fM\cos\alpha-P}{M+P}\cdot g$

Dreiundzwanzigstes Buch.

Von der rotirenden Bewegung eines Körpers um eine feste Achse.

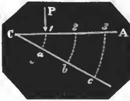
290.

Wir haben bisher, bei der Bewegung der Massen durch momentan oder constant wirkende Kräfte, nur den einfachen Fall betrachtet, wo alle Puncte der Massen sich nach parallelen Richtungen, mithin gleich schnell bewegten, und konnten deshalb die Masse immer als im Schwerpunct concentrirt annehmen. Wie verhält sich nun aber die Sache, wenn, wie es z. B. bei Maschinen der Fall ist, die durch eine Kraft in Bewegung gesetzte Masse sich nur um eine feste Achse drehen kann und wo demnach die kreisenden Puncte, die nicht gleich weit von der Achse entfernt sind, verschiedene Geschwindigkeiten haben? Soviel ist hier vorauszusehen, dass, weil die Achse, welche Richtung sie auch haben möge, absolut fest sein soll, die Masse durch sie unterstützt und folglich, vorläufig von allen Widerständen abstrahirt, eine bloss beharrliche ist, sowie aber auch, dass wir bei ihrer rotirenden Bewegung die ganze Masse nicht, wie vorhin bei der gradlinigen, als im Schwerpunct concentrirt annehmen können, der ja, wenn er, wie fast immer der Fall, in die feste Achse fiele, ganz unbeweglich wäre.

Es kommt nun darauf an, dieses hier angeregte wichtige, aber ursprünglich nicht leichte Problem zu lösen und eine Theorie für die rotirende Bewegung der Körper aufzustellen.

Wer hier den Scharfsinn und die Verdienste Huyghens anerkennen will, der es zuerst gethan und dadurch Licht in die Mechanik gebracht hat, der mache erst selbst den Versuch, diese für die Wissenschaft und Technik wichtige Theorie von der rotirenden Bewegung der Körper zu entwickeln.

291.



Angenommen, ein gewichtslos gedachter Hebel AC werde durch eine constante, stets rechtwinklig auf ihn gerichtete Druckkraft P in einer horizontalen Ebene um den Punct C gedreht. In der Entfernung = 1 vom Drehpunct C, wo, der Einfachheit halber, die constante Kraft stets drücken soll, befinde sich eine Masse = M, die man sich vorläufig aber noch in einem Punct vereint denken muss, so ist diese durch die horizontale Ebene unterstützte Masse, von der Reibung abstrahirt, eine bloss beharrliche und wird also durch den Druck, den der Punct 1 des Hebels auf sie ausübt, sich mit der gleichförmigen Beschleunigung $\frac{P}{M} \cdot g$ in der mit C 1 beschriebenen Kreislinie bewegen. Wie viel in einem Punct vereint gedachte Masse wird man nun aber, statt M in 1, in der doppelten Entfernung vom Drehpunct, in 2, legen können, damit der Hebel noch dieselbe Winkelgeschwindigkeit behält? (§ 244.)

Weil der Punct 2 des Hebels nur mit derjenigen Kraft drückt, welche, in entgegengesetzter Richtung wirkend, der im Punct 1 wirkenden Kraft das Gleichgewicht hält, also mit $\frac{1}{2}$ P (§ 67), so müsste schon aus diesem Grunde die im Punct 2 anzubringende Masse nur halb so gross, $= \frac{1}{2}$ M sein, wenn sie in derselben Zeit einen gleichen Weg, wie die vorhin in 1 befindliche ganze Masse M durchlaufen sollte, weil aber, wenn der Hebel dieselbe Winkelgeschwindigkeit behalten soll, der zu durchlaufende Weg $\widehat{2b}$ mal so gross ist, als $\widehat{1a}$, so muss, aus diesem 2ten Grunde, die im Puncte 2 durch ihr Beharrungsvermögen Widerstand leistende Masse wiederum nur die Hälfte von $\frac{1}{2}$ M, mithin nur $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ M $= \frac{1}{4}$ M sein. In der dreifachen Entfernung vom Drehpunct, im Punct 3,

drückt der Hebel auf eine in diesem Punct gedachte Masse nur mit $\frac{1}{3}$ P (§ 67), und weil der Weg $\widehat{3c}$, den dieser Punct bei derselben Winkelgeschwindigkeit des Hebels zu durchlaufen hat, dreimal so gross ist, als der des Punctes 1, so setzt eine bloss beharrliche Masse von $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$ M $= \frac{1}{9}$ M im Puncte 3 der Rotation des Hebels denselben Beharrungswiderstand entgegen, wie die ganze Masse M im Puncte 1. Man kommt auf dasselbe Resultat durch Rückschlüsse. Statt einer Masse m im Puncte 3 kann man im Drittel der Entfernung vom Drehpunct, im Punct 1, weil hier der Druck der constant bewegenden Kraft (wo auch ihr Angriffspunct sein möge) 3 mal so gross, der zu durchlaufende Weg dagegen (bei derselben Winkelgeschwindigkeit) nur $\frac{1}{3}$ so gross ist, die 9fache Masse $= 9m$ anbringen. Statt der Masse m in der Entfernung $= \frac{1}{2}$ vom Drehpunct kann man in der Entfernung $= 1$ die Masse $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m = \frac{1}{4} m$, allgemein: statt der Massen $m, m' \ldots$ in den Entfernungen $r, r' \ldots$ kann man die Massen $mr^2, m'r'^2 \ldots$ in der Entfernung $= 1$ anbringen.

292.

Aus vorhergehendem § folgt nun, dass zwei bloss beharrliche Massen m, m' (jede in einem Punct concentrirt gedacht) der Rotation des Hebels denselben Widerstand leisten, wenn die Producte aus den Massen in den Quadraten ihres Abstandes r, r' vom Drehpunct gleich sind.

Anmerkung. Das Product einer Masse m (in einem Punct vereint gedacht) in dem Quadrate ihres Abstandes $= r$ vom Drehpunct wird das Beharrungsmoment der Masse genannt, und dieses Moment mr^2 ist also gleich derjenigen Masse, welche man in der Entfernung $= 1$ substituiren kann.

293.

Nach dieser Vorausschickung lässt sich nun schon übersehen, was bei der Lösung des § 290 angeregten Problems, die Rotation eines Körpers um eine feste Achse betreffend, in Betracht kommen muss, nämlich:

1) Der Angriffspunct der bewegenden Kraft. Diesen Punct wollen wir vorerst, um die Begriffe zu fixiren, in der

Entfernung $= 1$ von der festen Drehachse und die Kraft stets senkrecht auf dem von diesem Angriffspunct auf die Achse gefällten Perpendikel annehmen. Jeder andere Fall lässt sich leicht auf diesen reduciren.

2) Wenn, wie wir hier erst annehmen, die bewegende Kraft immer mit derselben Intensität wirkt, so muss der Körper offenbar in eine gleichförmig beschleunigte Rotation kommen.

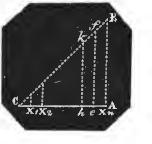
3) Unter Beschleunigung versteht man hier die Geschwindigkeit, welche ein Punct in der Entfernung $= 1$ von der Drehachse nach Ende der 1sten Secunde erlangt und welche man, weil dieser Punct sich im Kreise bewegt, auch wohl Winkelbeschleunigung nennt. Kennt man die Beschleunigung dieses Punctes, so kennt man sie auch von jedem andern Punct in der Entfernung $= r$, indem die Beschleunigungen den durchlaufenen Wegen und diese den Radien proportional sind.

4) Wären wir endlich im Stande, jedes der in den verschiedenen Entfernungen $r, r', r'', \ldots$ von der Achse befindlichen Massenelemente (Molecüle) $m, m', m'', \ldots$ auf die Entfernung $= 1$ zu reduciren, d. h. die Summe der Producte $mr^2, m'r'^2, \ldots$ zu finden, so wäre das Problem auf den einfachen Fall (§ 281) zurückgeführt. Bezeichnen wir die Summe dieser Producte mit T, so dass also: $T = mr^2 + m'r'^2 + \ldots$ das Beharrungsmoment der ganzen Masse, nämlich diejenige Masse ist, welche man (in einem Punct vereint gedacht) in der Entfernung $= 1$ statt der ganzen Masse des rotirenden Körpers $M = m + m' + m'' + \ldots$ substituiren kann.

Man sieht also, dass es jetzt darauf ankommt, zuerst eine Methode zu erfinden, nach welcher man das Beharrungsmoment T eines jeden um eine feste Achse rotirenden Körpers bestimmen kann.

Obgleich sich dieses rein mathematische Problem für alle geometrisch bestimmte Körper direct nur durch Hülfe der Infinitesimalrechnung lösen lässt, so giebt es doch einige einfache, aber gerade practisch wichtige Fälle, wo es, wenn auch indirect, auf elementare Weise geschehen kann und diese wollen wir hier mittheilen, indem wir, nach Huyghens Vorgange, von schwer gedachten Linien auf Flächen und von diesen wieder auf Körper übergehen.

294.



Aufgabe. Das Beharrungsmoment T einer sich um den Endpunct C in einer Ebene drehenden Linie CA $= l$ (eine dünne Stange z. B.) zu finden, über welche eine Masse $=$ M gleichmässig vertheilt ist.

Auflösung. Man denke sich die Linie in n gleiche Theile getheilt und bezeichne die Abstände der vom Drehpunct auf einander folgenden Theilpuncte mit $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, so kommt auf den 1sten Theil der Linie CA die Masse $\frac{x_1}{l}$M, auf den 2ten die Masse $\frac{x_2 - x_1}{l}$ M &c.

Denkt man sich diese gleichen Theile $x_1, x_2 - x_1, \ldots$ sehr klein und die Masse eines jeden, von C aus gerechnet, im Endpunct desselben concentrirt, so hat man vorläufig näherungsweise:

$$T = \frac{x_1}{l} M . x_1^2 + \frac{x_2 - x_1}{l} M . x_2^2 + \ldots . + \frac{x_n - x_{n-1}}{l} M . x_n^2, \text{ oder:}$$

$$T = \frac{M}{l} \left\{ x_1 . x_1^2 + (x_2 - x_1) . x_2^2 + (x_3 - x_2) . x_3^2 + \ldots + (x_n - x_{n-1}) x_n^2 \right\}$$

Denkt man sich im Endpunct A der dünnen Stange das Perpendikel AB $=$ AC errichtet und CB gezogen, dann in den Theilpuncten die auf CA senkrechten Linien ef, $hk, \ldots$ gezogen, so ist, weil AB $=$ AC $= x_n$, auch $ef = x_{n-1}$, $hk = x_{n-2}, \ldots$ Da nun auch (indem man rechter Hand mit π multiplicirt und dividirt):

$$T = \frac{M}{l \pi} \left\{ x_1 . x_1^2 \pi + (x_2 - x_1) . x_2^2 \pi + \ldots . + (x_n - x_{n-1}) . x_n^2 \pi \right\}$$

so lässt sich der eingeklammerte Factor jetzt geometrisch deuten. Jeder Theil drückt offenbar den Inhalt eines Cylinders aus, deren Radien respective $x_1, x_2, x_3, \ldots$ und deren Höhe $x_1, x_2 - x_1, x_3 -_2, \ldots .$ sind.

Nehmen wir nun, was wir offenbar können und müssen, diese gleichen Höhen unendlich klein, so erhält man, statt der Summe aller Cylinder, den Inhalt eines Kegels, dessen

Radius $AB = l$, dessen Höhe $AC = l$ und dessen Inhalt folglich $= \frac{1}{3} l . l^2 \pi$ und es ist also ganz genau: $T = \frac{M}{l\pi} . \frac{1}{3} l . l^2 \pi$, oder:

$$T = \frac{M}{3} . l^2$$

Zusatz 1. Wäre z. B. $l = 5'$, $M = 12$ ℔., so wäre das Beharrungsmoment der sich um C drehenden Stange $T = 100$ ℔. Diese Masse von 100 ℔. in den Punct gedacht, dessen Entfernung vom Drehpunct $= 1$ ist, übt durch ihr blosses Beharrungsvermögen gegen die bewegende Kraft P (wo auch ihr Angriffspunct sein möge) ganz denselben Widerstand aus, als die über die ganze Stange gleichmässig vertheilte Masse von 12 ℔.

Zusatz 2. Wirkt die constante Kraft $P, = 10$ ℔. z. B., in diesem Punct immer rechtwinklig auf die Stange, so ist die Beschleunigung dieses Puncts (die Winkelbeschleunigung), vermöge § 281, $= \frac{P}{T} . g = \frac{10}{100} . 31{,}25 = 3'{,}125$.

Zusatz 3. Die Beschleunigung irgend eines andern Punctes der rotirenden Stange wächst offenbar im Verhältniss zu seiner Entfernung vom Drehpunct und ist z. B. für den Punct $A = \frac{P}{T} . lg$.

Zusatz 4. Setzt man die Entfernung desjenigen Puncts vom Drehpunct, in welchem die ganze Masse M angebracht, der Rotation der Stange denselben Widerstand leisten würde, als wenn sie gleichmässig über sie vertheilt ist, $= z$, so muss dieses z, der sogenannte Rotationshalbmesser, so gross sein, dass (§ 290) $Mz^2 = T . 1^2$, mithin $z = \sqrt{\frac{T}{M}}$, oder auch, weil hier: $T = \frac{1}{3} M l^2$, also $M z^2 = \frac{1}{3} M l^2$, woraus: $z = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0{,}577 . l$. Dieser Punct der schweren Linie (Stange) CA ist hier für $l = 5'$ um $z = (0{,}577) . 5 = 2'{,}885$, mithin weiter, als der Schwerpunct vom Drehpunct entfernt.

Zusatz 5. Setzt man die Masse, welche, in der Entfernung $= r$ vom Drehpunct angebracht, der Rotation denselben Widerstand leistet, $= M'$, so hat man: $M' . r^2 = T$, woraus: $M' = \frac{T}{r^2}$, oder weil hier $T = \frac{1}{3} M l^2$ ist: $M' = \frac{M}{3} . \frac{l^2}{r^2}$. Nimmt

man $r = l$, so ist $M' = \frac{1}{3} M$. Man kann also statt der über die rotirende Stange gleichmässig verbreiteten Masse M ein Drittel derselben im Endpunct A angebracht denken.

295.

Bei der Bestimmung des Beharrungsmoments einer schwer gedachten Linie, Fläche oder eines Körpers kann man auch, wenn die Masse gleichmässig vertheilt und folglich der Länge, der Fläche, dem Volumen proportional ist, der Einfachheit halber, letztere drei Grössen statt der erstern und am Ende der Rechnung erstere wieder statt der letztern substituiren. So hat man z. B. für das Beharrungsmoment der um C rotirenden Linie $CA = l$ (§ 294), indem man die gleichen Theilchen x_1, $x_2 - x_1$, ... gleich als Massen ansieht und die auf die Längeneinheit kommende Masse $= 1$ setzt, erst näherungsweise:

$$T = x_1 \,.\, x_1^2 + (x_2 - x_1) \,.\, x_2^2 + \ldots + (x_n - x_{n-1}) x_n^2$$

$$T = \frac{1}{\pi} \left\{ x_1 \,.\, x_1^2 \pi + (x_2 - x_1) \,.\, x_2^2 \pi + \ldots + (x_n - x_{n-1}) \,.\, x_n^2 \pi \right\}$$

Denkt man sich die gleichen Theile x_1, $x_2 - x_1$, ... unendlich klein, so giebt der eingeklammerte Factor wieder den Cubikinhalt des Kegels, dessen Radius und Höhe $= l$, und dessen Volumen folglich $= \frac{1}{3} l \,.\, l^2 \pi$. Es ist also $T = \frac{1}{\pi} \,.\, \frac{1}{3} l \,.\, l^2 \pi = \frac{1}{3} l \,.\, l^2$, oder, indem wir statt der Länge l der Linie (Stange) ihre Masse substituiren, ganz wie vorhin: $T = \frac{1}{3} M l^2$.

296.



Wenn das Beharrungsmoment eines Körpers in Bezug auf eine durch den Schwerpunct S gehende Achse bekannt ist, so kann man daraus leicht das Beharrungsmoment desselben Körpers in Bezug auf eine andere, durch einen bestimmten Punct O gehende, mit ersterer parallele Achse finden und umgekehrt.

Sei, um die für die Folge hiezu erforderliche, wichtige

Formel abzuleiten, O der Drehpunct einer schwer gedachten Fläche (dünnen Scheibe) und S ihr Schwerpunct. Durch beide Puncte denke man sich eine Abscissenachse xx gezogen und setze den als bekannt zu betrachtenden Abstand beider Puncte, nämlich O S, $= d$. Seien ferner $m', m'', m''', \ldots$ die Massenelemente der dünnen Scheibe, $r', r'', r''', \ldots$ ihre Entfernungen vom Schwerpunct S und $\varrho', \varrho'', \varrho''', \ldots$ ihre Entfernungen vom neuen Drehpunct O.*) Bezeichnen wir das als bekannt anzusehende Beharrungsmoment in Bezug auf den Schwerpunct S mit T und das unbekannte in Bezug auf den Drehpunct O mit T', so ist:

$$T = m' r'^2 + m'' r''^2 + m''' r'''^2 + \ldots.$$
$$T' = m' \varrho'^2 + m'' \varrho''^2 + m''' \varrho'''^2 + \ldots.$$

Denkt man von allen Massenpuncten $m', m'', \ldots$ Perpendikel $m'P', m''P'', \ldots$ auf die Abscissenachse xx gefällt und bezeichnet die Abscissen dieser Puncte von S aus nach positiver und negativer Seite gemessen, nämlich SP', SP'', ... mit $x', x'', \ldots$ so hat man aus dem Dreieck $Om'S$, indem man $m'P' = y'$ setzt: $\varrho'^2 = y'^2 + (d + x')^2 = y'^2 + x'^2 + d^2 + 2dx'$, oder weil $y'^2 + x'^2 = r'^2$:

$$\varrho'^2 = r'^2 + d^2 + 2\,d\,x'.$$

Eben so hat man aus den Dreiecken $Om''S$, $Om'''S, \ldots$ indem man die Vorzeichen der Abscissen $x', x'', \ldots$ berücksichtigt:

$$\varrho''^2 = r''^2 + d^2 + 2\,d\,x''$$
$$\varrho'''^2 = r'''^2 + d^2 + 2\,d\,x'''$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Multiplicirt man diese Gleichungen für $\varrho', \varrho'', \ldots$ beiderseits mit $m', m'', \ldots$ und addirt sie alle, so hat man mit Berücksichtigung der beiden Gleichungen für T und T', und indem man die ganze Masse der dünnen Scheibe $m' + m'' + m''' + \ldots = M$ setzt: $T' = T + Md^2 + 2d(m'x' + m''x'' + m'''x''' + \ldots)$. Der in Klammern stehende Factor ist nun aber gleich der

---

*) Wird dieser Punct O ausserhalb der Masse angenommen, so muss man sich denselben durch eine feste massenlose Linie mit der um ihn rotirenden Masse verbunden denken.

Summe der statischen Momente in Bezug auf die durch den Anfangspunct S gehende Achse YY. Da aber dieser Punct S der Schwerpunct ist, so ist nothwendig auch die Summe dieser statischen Momente $m'x' + m''x'' + \ldots = 0$. (Dies folgt aus § 132, indem dort offenbar in Formel (2) $x = 0$ werden muss, wenn die Achse YY durch den dort gesuchten Schwerpunct S geht.) Wir haben also für die zum Weiterkommen nöthigen und deshalb wichtigen Beziehungen unter den beiden Beharrungsmomenten T' und T die beiden Gleichungen:

$$T' = T + Md^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$T = T' - Md^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Anmerkung. Die Gleichung (2) lehrt, dass das Beharrungsmoment eines Körpers in Bezug auf eine durch seinen Schwerpunct gehende Achse immer kleiner ist, als in Bezug auf jede andere damit parallele.

297.



Aufgabe. Zufolge § 294 ist das Beharrungsmoment einer dünnen Stange $CA = l$, die um ihren Endpunct rotirt, $T' = \frac{1}{3} M l^2$. Wie findet man hieraus das Beharrungsmoment dieser Stange in Bezug auf ihren Schwerpunct?

Auflösung. Da hier $d = \frac{1}{2} l$, so hat man nach Formel 2 (§ 296) $T = \frac{1}{3} M l^2 - \frac{M}{4} l^2$, oder:

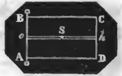
$$T = \tfrac{1}{12} M l^2.$$

Anmerkung. Dies Resultat folgt auch aus § 294, wenn man das Beharrungsmoment in Bezug auf den Schwerpunct S der Linie $AC = l$, für jede Hälfte $SA = SC = \frac{1}{2} l$ bestimmt und beide Momente addirt, indem es nämlich gleichgültig ist, ob man die Masse T in einem Punct vereint, oder auf zwei oder beliebig viele Puncte in der mit dem Radius = 1 beschriebenen Kreislinie vertheilt denkt.

298.

Aufgabe. Ein Rechteck AC (eine dünne Platte, Flügel), dessen eine Seite $AD = a$ und dessen Masse = M ist, rotirt

um die andere Seite A B als Achse. Wie gross ist dessen Beharrungsmoment T?



Auflösung Man denke sich das Rechteck in n sehr schmale Streifen, wie oh, zerlegt, die man als materielle Linien betrachten kann, so ist das Beharrungsmoment eines solchen, um seinen Endpunct o rotirenden Streifens (§ 294) $= \frac{1}{3} \frac{M}{n} . a^2$. Mithin das des Rechtecks:

$$T = \tfrac{1}{3} M . a^2.$$

Die Breite des Rechtecks kommt also hiebei gar nicht in Betracht. Die gefundene Masse $\frac{1}{3} M a^2$ kann man sich statt der Masse M gleichmässig über die Linie vertheilt denken, welche mit der Drehachse A B in der Entfernung $= 1$ parallel ist.

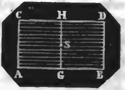
Anmerkung. Wirkte die das Rechteck in Rotation setzende constante Kraft nicht in dieser Entfernung, so kann man sie sich darauf reducirt denken, dabei aber, den Umständen nach, noch ein Kräftenpaar erhalten (§ 131).

Zusatz. Rotirt das Rechteck um eine mit A B parallele, durch seinen Schwerpunct S gehende Achse, so hat man wieder, wie in § 297:

$$T = \tfrac{1}{12} M a^2.$$

299.

Aufgabe. Das Beharrungsmoment eines Rechtecks A D (einer dünnen rechteckigen Platte) in Bezug auf den Mittelpunct G der Grundlinie A B zu finden (das Rechteck rotirt in der Ebene des Papiers um den Punct G). Es sei $AB = a$, $AC = b$ und also (sämmtliche Puncte als bloss beharrlich gedacht) die Masse des Rechtecks $M = ab$ (§ 295).



Auflösung. Man denke sich das Rechteck, wie angedeutet, in n kleinere gleiche Rechtecke getheilt. Seien $x_1, x_2, x_3 \ldots$ die Abstände ihrer respectiven Schwerpuncte $s_1, s_2, \ldots$ von G,

so ist die Masse eines **jeden** der kleinern Rechtecke $= \frac{M}{n}$ und das Beharrungsmoment eines jeden, in Bezug auf seine Schwerpuncte $s_1, s_2, \ldots = \frac{1}{12} \cdot \frac{M}{n} a^2$ (§ 297). Reduciren wir jedes dieser Momente auf den Punct G, so ist, vermöge der Formel: $T' = T + M d^2$, das Beharrungsmoment des ersten Streifens (indem hier $d = x_1$ ist) $= \frac{1}{12} \frac{M}{n} \cdot a^2 + \frac{M}{n} \cdot x_1^2$, ebenso das des 2ten kleinen Rechtecks in Bezug auf den Drehpunct $G = \frac{1}{12} \frac{M}{n} \cdot a^2 + \frac{M}{n} \cdot x_2^2$ &c. Mithin das Beharrungsmoment T' für alle n kleinen Rechtecke in Bezug auf den Drehpunct G näherungsweise:

$$T' = \frac{n}{12} \cdot \frac{M}{n} \cdot a^2 + \left(\frac{M}{n} x_1^2 + \frac{M}{n} x_2^2 + \ldots + \frac{M}{n} x_n^2\right)$$

Die eingeklammerte Reihe deutet hier an, dass die Masse M auf jeden der n Puncte der Linie $GH = b$ gleichmässig vertheilt ist. Denkt man sich also die n Rechtecke unendlich klein (als Linien, $n = \infty$), so stellt die eingeklammerte Reihe offenbar das Beharrungsmoment der Linie $GH = b$ von der Masse M in Bezug auf den Punct G dar, und da dieses nach § 294 $= \frac{1}{3} M b^2$, so hat man für das fragliche Beharrungsmoment des Rechtecks ganz genau $T' = \frac{1}{12} M a^2 + \frac{1}{3} M b^2$, oder:

$$T' = \frac{M}{12}(a^2 + 4b^2)$$

Zusatz 1. Will man das Beharrungsmoment T des Rechtecks in Bezug auf dessen Schwerpunct S, so hat man, zufolge der Reductionsformel § 296 (indem man hier $d = \frac{1}{2} b$):
$T = \frac{1}{12} M (a^2 + 4b^2) - M . \frac{b^2}{4}$ oder:

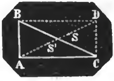
$$T = \frac{M}{12}(a^2 + b^2).$$

Zusatz 2. Für das Beharrungsmoment T'' des Rechtecks, in Bezug auf den Eckpunct A, hat man (§ 296), indem hier $d^2 = \overline{AS}^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$:

$$T'' = \frac{M}{3} \cdot (a^2 + b^2).$$

Anmerkung. Es ist leicht einzusehen, dass die drei vorstehenden Formeln auch für ein rechtwinkliges Parallelopiped, dessen Masse $=$ M ist, gelten, welches das Rechteck AD zur Grundfläche hat und sich um eine durch G, S, A gehende, auf der Grundfläche senkrechte Achse dreht. Die gefundenen Massen T′, T, T″ kann man sich dann in jedem dieser drei Fälle gleichmässig über die in der Entfernung $= 1$ mit der Rotationsachse parallele Linie vertheilt denken (vergl. Anmerkung § 298).

300.



Aufgabe. Das Beharrungsmoment eines rechtwinkligen, schwer gedachten Dreiecks ABC zu finden, welches um den Scheitel des rechten Winkels in einer Ebene rotirt. Es sei $AC = a$, $AB = b$, $BC = c = \sqrt{a^2 + b^2}$ und die gleichmässig vertheilte Masse $=$ M.

Auflösung. Sei das gesuchte Beharrungsmoment $=$ T, so ist das Beharrungsmoment des Dreiecks BDC, welches ersteres zu einem Rechteck ergänzt, in Bezug auf den Punct D auch $=$ T und in Bezug auf den Schwerpunct S (zufolge § 296, indem hier $DS = d = \frac{1}{3}c) = T - M.\frac{c^2}{9}$ und indem wir von hier auf den Drehpunct A übergehen, das Beharrungsmoment des Dreiecks BDC in Bezug auf A (§ 296, indem hier $AS = d = \frac{2}{3}c$) $= T - M\frac{c^2}{9} + M.\frac{4c^2}{9} = T + \frac{1}{3}Mc^2 = T + \frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$. Addiren wir hierzu das Beharrungsmoment T des Dreiecks ABC, so giebt die Summe offenbar das aus § 299, Zus. 2 schon bekannte Beharrungsmoment des ganzen Rechtecks AD, dessen Masse aber $= 2$M. Daher $2T + \frac{1}{3}M(a^2 + b^2) = \frac{2M}{3}(a^2 + b^2)$, woraus:

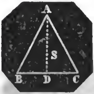
$$T = \frac{M}{6}(a^2 + b^2).$$

Zusatz 1. Das Beharrungsmoment des Dreiecks ABC in Bezug auf seinen Schwerpunct S′ ist also (§ 296):

$$T = \frac{M}{18}(a^2 + b^2).$$

Zusatz 2. Es ist klar, dass die vorstehenden beiden Formeln zugleich auch für ein grades dreiseitiges Prisma gelten, welches das Dreieck ABC zur Grundfläche hat und um die durch A gehende Kante oder um eine damit parallele durch S' gehende Achse rotirt (vergl. § 299, Anmerkung).

301.



Aufgabe. Das Beharrungsmoment T eines gleichschenkligen Dreiecks zu finden, welches um die Spitze A rotirt. Es sei die Grundlinie BC $= 2a$, die Höhe AD $= h$ und dessen Masse $=$ M.

Auflösung. Das Beharrungsmoment eines jeden der beiden rechtwinkligen Dreiecke, in Bezug auf den Drehpunct D, ist (§ 300) $= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} M (a^2 + h^2)$, mithin das des ganzen gleichschenkligen Dreiecks, in Bezug auf D, $= \frac{1}{6} M (a^2 + h^2)$ und in Bezug auf seinen Schwerpunct S (§ 296, indem $d = \frac{1}{3} h$)

$$= \frac{1}{6} M (a^2 + h^2) - \frac{M}{9} \cdot h^2 = \frac{1}{18} M (3a^2 + h^2).$$

In Bezug auf den Drehpunct A ist also:

$$T = \frac{M}{6} (a^2 + 3h^2).$$

302.

Aufgabe. Das Beharrungsmoment T eines regelmässigen Vielecks, dessen Seiten $= 2a$, das darauf vom Mittelpunct gefällte Perpendikel $= h$ und dessen Masse $=$ M ist, in Bezug auf den Mittelpunct C zu finden.

Auflösung. Das Beharrungsmoment eines jeden der n gleichschenkligen Dreiecke, in welche das Vieleck zerfällt, ist nach § 301 $= \frac{1}{6} \cdot \frac{M}{n} (a^2 + 3h^2)$, mithin das des ganzen Vielecks:

$$T = \frac{M}{6} (a^2 + 3h^2).$$

Diese Masse T kann man also in der Entfernung $= 1$ vom Drehpunct in einem Punct vereint oder auch auf die mit dem

Radius $= 1$ aus dem Drehpunct beschriebene Kreislinie vertheilt denken.

Zusatz. Dieselbe Formel gilt offenbar auch für ein regelmässiges Prisma, welches sich um eine geometrische Achse dreht.

303.

Aufgabe. Das Beharrungsmoment T eines Kreises (dünnen Scheibe) zu finden, der um seinen Mittelpunct rotirt, dessen Radius $= r$ und dessen Masse $=$ M ist.

Auflösung. Denkt man sich die Seitenzahl des im Kreise beschriebenen regelmässigen Vielecks immerfort verdoppelt, so giebt die vorige Formel, indem an der Grenze $a = 0$ und $h = r$ wird:

$$T = \frac{1}{2} M r^2.$$

Zusatz 1. Diese Formel gilt auch für einen Cylinder, der um seine geometrische Achse rotirt

Zusatz 2. Statt der Masse T in der Entfernung $= 1$, vom Drehpunct, kann man also auch die halbe Masse der Scheibe (Cylinders) am Umfange angebracht denken, weil $\frac{1}{2} M r^2 = T . 1^2$

304.



Aufgabe. Das Beharrungsmoment T eines Kreisringes (hohlen Cylinders, Schwungrades) in Bezug auf den Mittelpunct zu finden. Es seien die Radien r und R und die Masse $=$ M.

Auflösung. Setzt man die Masse der Flächeneinheit $= 1$, so ist die Masse des voll gedachten Kreises $= R^2 \pi$, die des herausgenommenen $= r^2 \pi$, und die des Ringes $(R^2 - r^2) \pi = M$. Das gesuchte Beharrungsmoment T des Ringes muss offenbar gleich der Differenz der Momente beider Kreise sein, daher $T = \frac{1}{2} R^2 \pi . R^2 - \frac{1}{2} r^2 \pi . r^2$, oder $T = \frac{1}{2} (R^4 - r^4) \pi = \frac{1}{2} (R^2 - r^2) \pi . (R^2 + r^2)$, d. i.

$$T = \frac{M}{2} (R^2 + r^2).$$

305.



Aufgabe. Um eine Rolle, deren Gewicht $= G$, läuft eine gewichtslos gedachte Schnur, deren beide Enden mit den Gewichten M und $M + m$ belastet sind. Was für eine Bewegung wird eintreten, wenn $G = 1$ ℔, $M = 5$ ℔, $m = 0{,}1$ ℔., der Radius der Rolle $r = 3$ Zoll, der des Zapfens $r' = 0{,}1$ Zoll, und der Reibungscoefficient $f = 0{,}05$.

Auflösung. Um zuerst die der Ueberwucht m entgegenwirkende Reibung zu finden, bedenke man, dass, streng genommen, der Druck D auf die Zapfenläger weder $= 2M + G$, noch $= 2M + m + G$ ist. Denn weil die Reibung das Sinken der Masse $M + m$ verzögert, so muss offenbar auch die Spannung des Seils $> M$, der eintretenden Bewegung halber aber $< M + m$ sein.

In der Voraussetzung, dass die Spannung an beiden Enden gleich gross, $= x$, sei, sinkt die Masse $M + m$ mit der Beschleunigung $\frac{M + m - x}{M + m} \cdot g$ und auf der andern Seite steigt die Masse M mit der Beschleunigung $\frac{x - M}{M} \cdot g$ (§ 280, Amkg.), und da beide gleich sein müssen, so hat man $\frac{x - M}{M} g = \frac{M + m - x}{M + m} \cdot g$, woraus $x = \frac{2M(M + m)}{2M + m} = 5{,}049$ ℔. Es wäre also der Druck $D = 2x + G = 11{,}099$ ℔., und die Reibung am Zapfen $fD = 0{,}55495$ ℔ $= 0{,}555$ ℔. Reduciren wir diese am Hebelarm r' wirkende Reibung auf den Umfang der Rolle, und bezeichnen wir die dort zum Gleichgewicht erforderliche Kraft mit F, so folgt aus $Fr = fDr'$ (§ 115), dass $F = \frac{r'}{r} fD$. Statt der mit in Bewegung zu setzenden Masse der Rolle kann man die halbe Masse $\frac{1}{2}G$ am Umfange angebracht denken (§ 303, Zus. 2). Es ist also die bewegende constante Kraft $= m - F$, und die zu bewegende Masse $= 2M + m + \frac{1}{2}G$, mithin die Bewegungsgleichungen:

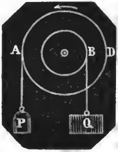
$$v = \frac{m - \frac{r'}{r} fD}{2M + m + \frac{1}{2}G} \cdot gt \ldots . (1)$$

$$s = \frac{m - \frac{r'}{r} f D}{2M + m + \frac{1}{2}G} \cdot g t^2 \ldots (2)$$

Für das angenommene Zahlenbeispiel wäre hier die Beschleunigung $\frac{m - \frac{r'}{r} f D}{2M + m + \frac{1}{2}G} \cdot g = 0{,}008\, g = 0',25.$

306.

Aufgabe. An Rad und Welle wirken zwei Gewichte P und Q, und es ist P so gross, dass eine Bewegung im Sinne dieser Kraft erfolgen muss. Mit welcher Beschleunigung wird die Kraft P sinken, wenn die Radien des Rades, der Welle und des Zapfens beziehlich R, r, r', das Gewicht des Rades $=$ M, das der Welle $=$ M' und der Reibungscoefficient $= f$ ist?



Auflösung. Für $PR = Qr$ oder $P = \frac{r}{R} Q$ wäre Gleichgewicht vorhanden. Da nun aber P grösser sein soll, um Bewegung hervor zu bringen, so ist die bewegende Kraft $= P - \frac{r}{R} Q$ weniger der Reibung. Der Druck auf die Zapfenlager ist genau genug $D = P + Q + M + M'$, daher die Zapfenreibung $= fD$. Reduciren wir diese am Hebelarm r' wirkende Reibung auf den Umfang des Rades, so ist die der Kraft $P - \frac{r}{R} Q$ direct entgegenwirkende, aus der Zapfenreibung (welche aber in der Regel nicht berücksichtigt wird) entspringende Kraft $= fD . \frac{r'}{R}$, mithin die bewegende constante Kraft $= P - \frac{r}{R} Q - \frac{r'}{R} fD$. Reduciren wir nun alle Massen auf den Umfang des Rades und bezeichnen mit x, y, z die Massen, welche statt Q, M, M' in D angebracht werden können, so hat man (zufolge §§ 292, 303, 304): $x R^2 = Q r^2$,

$y\mathrm{R}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{M}(\mathrm{R}^2 + r^2)$, $z\mathrm{R}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{M}'.r^2$ und folglich die zu bewegende Masse $= \mathrm{P} + \frac{r^2}{\mathrm{R}^2}\mathrm{Q} + \frac{\mathrm{R}^2 + r^2}{\mathrm{R}^2} \cdot \frac{\mathrm{M}}{2} + \frac{r^2}{\mathrm{R}^2} \cdot \frac{\mathrm{M}'}{2}$, mithin die fragliche Beschleunigung k der Masse P, oder des Punctes A:

$$k = \frac{\mathrm{P} - \frac{r}{\mathrm{R}}\mathrm{Q} - \frac{r'}{\mathrm{R}}f\mathrm{D}}{\mathrm{P} + \frac{r^2}{\mathrm{R}^2}\mathrm{Q} + \frac{\mathrm{R}^2 + r^2}{\mathrm{R}^2} \cdot \frac{\mathrm{M}}{2} + \frac{r^2}{\mathrm{R}^2}\frac{\mathrm{M}'}{2}} \cdot g.$$

Anmerkung 1. Will man die Beschleunigung k', mit welcher die Masse Q steigt, so ist (§ 294, Zus. 3) $k' = \frac{r}{\mathrm{R}}\, k$.

Anmerkung 2. Wäre P kein Gewicht, sondern eine sogenannte mechanische Kraft (z. B. Dampfkraft), so muss in dem Ausdruck für k, P im Nenner weggelassen werden.

Vierundzwanzigstes Buch.

Gesetze der Pendelschwingungen. Mittelpunct des Schwunges und des Stosses.

307.

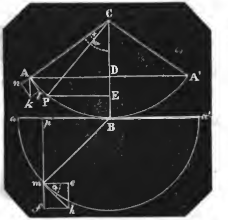
Es sei eine kleine Kugel, B, vermittelst eines unausdehnsamen Fadens in einem Punct, C, aufgehängt, so hat man ein sogenanntes Pendel (s. f. Figur). Denkt man sich den Faden gewichtslos und die Masse der Kugel in Einem Punct, B, concentrirt, so heisst das Pendel ein einfaches oder mathematisches. Ein jeder Körper dagegen, der um eine horizontale Achse Schwingungen machen kann, heisst ein zusammengesetztes oder physisches Pendel. Obgleich das mathematische Pendel, gleich wie der mathematische Hebel, nur in der Idee existirt, so müssen wir dennoch dies ideale Pendel zuerst betrachten, weil die Theorie des physischen Pendels darauf basirt werden muss.

308.

Einfaches Pendel. Bringt man das Pendel aus seiner Gleichgewichtslage in die Lage CA und überlässt es dann sich selber, so muss es (von allen Widerständen abstrahirt) in einer durch die Gleichgewichtslage gehenden Verticalebene

immerfort hin und her schwingen; denn das in A vertical wirkende Gewicht der Kugel, welches durch die Linie Ak dargestellt sein soll, zerlegt sich in die beiden Composanten An und At, erstere An in der Richtung CA trägt nichts zur Bewegung bei, sondern erhält den unausdehnsamen Faden nur stets gespannt, die andere At senkrecht auf CA (also stets tangential wirkend) setzt die Kugel gerade so in Bewegung, als wenn sie, ohne Reibung, in einem kreisförmigen verticalen Canal liefe, sie hat deshalb, indem man die horizontale Sehne AA' gezogen denkt, vermöge § 233, in B angekommen, dieselbe Geschwindigkeit erlangt, als wenn sie durch die Höhe DB frei gefallen wäre, und vermöge dieser Geschwindigkeit muss sie also auf der andern Seite der Verticalen CB auf gleiche Höhe, bis zum Punct A' steigen. Dann geht aus demselben Grunde die Bewegung wieder rückwärts von A' nach A etc. Es fragt sich nun, in wie viel Zeit der schwere Punct den Kreisbogen $\widehat{ABA'}$ durchläuft, oder das ideale Pendel Eine **Schwingung** (**Oscillation**) macht.

309.



*) Es ist vorauszusehen, dass diese fragliche Schwingungszeit t von der Grösse des sogenannten **Ausschlags-** oder **Elongations-Winkels** ACB $= w$ und von der Länge des Pendels CA $= l$ abhängt.

Es sei das Pendel aus der Lage CA in die Lage CP gekommen und habe den veränderlichen Winkel $\widehat{ACP} = x$ beschrieben, so ist die Geschwindigkeit v der Pendelkugel im Puncte P ganz dieselbe, als wenn sie ganz frei durch die Höhe DE gefallen wäre, nämlich $v = \sqrt{2g}\,.\,\text{DE}$ (§ 233). Nun ist aber DE$=$CE$-$CD, oder weil CE$= l \cos(w-x)$

und CD$=l\cos w$, so ist DE$=l\,[\cos(w-x)-\cos w]$, daher $v=\sqrt{2gl\,[\cos(w-x)-\cos w]}$, oder (Trigon. § 100, 33):

$$v=\sqrt{gl.4\sin\frac{2w-x}{2}.\sin\tfrac{1}{2}x}\ldots\ldots(1)$$

Denken wir uns beide Winkel w und x in Theilen des Halbmessers ($=1$) ausgedrückt (Trigon. § 62a), so ist der Bogen $\widehat{AP}=lx$ und Bogen $\widehat{AA'}=l.2w$. Denken wir uns ferner den Schwingungsbogen $\widehat{AA'}$ auf die durch B gehende Tangente zu einer graden Linie ausgestreckt, so dass $\overline{aa'}=\widehat{AA'}$, so kann man annehmen, die Pendelkugel bewege sich in derselben Zeit t durch diese grade Linie aa' nach demselben Gesetze, wie durch den Kreisbogen $\widehat{AA'}$, so dass, wenn z. B. $\overline{ap}=\widehat{AP}=lx$, sie in p dieselbe Geschwindigkeit, wie in P hat.

Beschreibt man über $\overline{aa'}=l.2w$ mit dem Radius $r=\frac{1}{2}\overline{aa'}=lw$ aus B einen Halbkreis, so kann man ferner annehmen, ein Punct bewege sich mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit, c, in derselben fraglichen Zeit t durch diesen Halbkreis, wo also $c=\frac{r\pi}{t}$ (§ 214).*)

Errichtet man in p das Perpendikel mp und denkt sich die constante tangentiale Geschwindigkeit $c=mh$ im Puncte m in zwei Composanten me und mf zerlegt, wovon erstere $me=u$ parallel mit $\overline{aa'}$ und die andere mf darauf senkrecht ist, so hat man: $u=c.\cos\alpha$, oder weil, indem man B$m=r$ zieht, $\widehat{pmB}=\widehat{emh}=\alpha$ und $\cos\alpha=\frac{mp}{r}$, so ist $u=c.\frac{mp}{r}$. Ferner, weil (Geometrie § 126) $ap:mp=mp:pa'$ d. i. $lx:mp=mp:l\,(2w-x)$, woraus: $mp=\sqrt{l^2(2w-x)\,x}$, so ist auch: $u=c\cdot\frac{\sqrt{l^2(2w-x)x}}{r}$ oder für c seinen Werth gesetzt:

$$u=\frac{lx}{t}.\sqrt{(2w-x).x}\ldots\ldots(2)$$

Wäre nun, für einen bestimmten Ausschlagswinkel, w, in allen correspondirenden Puncten, wie p und P, d. h. für jeden Werth von x (von $x=0$ bis $x=w$) die mit $\overline{aa'}$

*) Vergleiche **Bohnenberger's** Astronomie pag. 403.

parallele Geschwindigkeit $u = v$, so hätte man aus den Gleichungen (1) und (2) erst:

$$\sqrt{gl}.\sqrt{4 \sin \tfrac{1}{2}(w-x)}.\sin \tfrac{1}{2} x = \frac{l\pi}{t}\sqrt{(2w-x)x}$$

und hieraus den gesuchten, durch w, g, l bestimmten Werth von t, nämlich:

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.\sqrt{\frac{(2w-x).x}{4\sin\frac{1}{2}(2w-y)\sin\frac{1}{2}x}} \;\ldots\ldots(3)$$

indem man für x einen ganz beliebigen Werth, der zwischen 0 und w fällt, setzt. Weil nun aber t durch w, l, g völlig bestimmt, folglich constant ist, so müsste auch der Bruch $\frac{(2w-x).x}{4\sin\frac{1}{2}(2w-x)\sin\frac{1}{2}x}$ constant sein, d. h. für jeden Werth von x immer dasselbe geben. Dies ist aber, wie man sieht, nur dann näherungsweise möglich, wenn man den Ausschlagswinkel w und folglich auch x so klein nimmt, dass man die Sinus der in Bögen ausgedrückten Winkel mit ihren Bögen verwechseln kann, denn dann wird der Nenner des fraglichen Bruchs $4 \sin \frac{1}{2}(2w-x) \sin \frac{1}{2} x = 4.\frac{1}{2}(2w-x)\frac{1}{2}x = (2w-x)x$ und folglich der Bruch selbst für so kleine Winkel näherungsweise immer $= 1$. So ist z. B. die Länge eines mit dem Radius $= 1$ beschriebenen Bogens von $4^0 = 0{,}0698132$ und $\sin 4^0 = 0{,}0697564$, fast bis auf vier Decimalen einander gleich. Lassen wir also den Ausschlagswinkel nicht grösser als 4^0 sein, so haben wir für die gesuchte Schwingungszeit näherungsweise:*)

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

*) Die genauere, jedoch nur durch Infinitesimalrechnung zu findende Formel, welche die Schwingungszeit t für jeden Ausschlagswinkel (bis $w = 90^0$) giebt, ist:

$$t = \left\{1 + (\tfrac{1}{2})^2\frac{h}{2l} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{h}{2l}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3\left(\frac{h}{2l}\right)^3 + \ldots\right\}\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

worin h die Höhe DB des Schwingungsbogens $\widehat{AA'}$ bedeutet. In der Regel ist aber h gegen l so klein, dass man die auf 1 folgenden Glieder der eingeklammerten Reihe, als unbedeutend, weglassen kann, was dann wieder auf die im Text angegebene Näherungsformel führt.

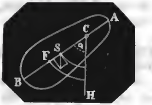
310.

Physisches Pendel. Sei ein physischer Körper von bestimmter Figur um eine durch C gehende horizontale, in der Figur nur projicirte Achse drehbar, dann muss er, aus der Gleichgewichtslage CH gebracht, aus angegebenen Gründen Pendelschwingungen machen und es kommt wieder darauf an, die Schwingungszeit t zu bestimmen.

Wären die einzelnen Massenpuncte nicht fest mit einander verbunden, sondern frei (getrennt), so würden offenbar die, welche der Achse C näher liegen, ihre kleineren Schwingungsbögen in kürzerer Zeit durchlaufen, als die, welche weiter von der Achse entfernt sind; dies folgt schon aus Formel (4) § 309. Da die Massenpuncte aber, wegen ihrer festen Verbindung, ihre verschiedenen Schwingungsbögen doch in derselben Zeit durchlaufen, so ist klar, dass die von der Achse entfernteren Puncte die Geschwindigkeiten der ihr näher liegenden verzögern, und umgekehrt die der Achse näheren Massenpuncte die Geschwindigkeiten der entfernteren beschleunigen, und dass es deshalb in der durch den Schwerpunct S des Pendels gehenden und auf der Achse senkrechten Linie AB gewiss einen Punct, F, geben muss, dessen Geschwindigkeit durch die andern Massenpuncte weder beschleunigt, noch verzögert wird, und sich also just so bewegt, als wenn er ganz frei wäre. Dieser zu bestimmende Punct F führt den Namen Mittelpunct des Schwunges. Könnte man die Entfernung desselben von der Achse, nämlich $CF = l$ finden, so könnte man diesen Punct (weil er ja ganz frei schwingt) als den schweren Punct eines einfachen Pendels von der Länge $= l$ betrachten und dessen Schwingungszeit für einen kleinen Ausschlagswinkel, nach der schon § 309 gefundenen Formel $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ berechnen, und hätte somit auch die hier fragliche Schwingungszeit für das physische Pendel.

311.

Weil nun das ganze Gewicht M des Pendels, wenn man es im Schwerpunct S nach entgegengesetzter Richtung wirken liesse, für jeden Zustand des veränderlichen Winkels $BCH = \alpha$ Gleichgewicht hervorbringen würde, so ist, indem wir diese



in S wirkende Kraft M in zwei Composanten zerlegen, die eine nach der Richtung SB und die andere darauf senkrecht (tangential), offenbar M.sin α die das Pendel bewegende, mit dem Winkel α veränderliche Kraft. Da nun diese Kraft sämmtliche jetzt bloss beharrliche Massenpuncte in Bewegung setzt, diese aber verschiedene Abstände von der Drehachse haben, so müssen sie, um die augenblickliche Beschleunigung des Punctes S nach tangentialer Richtung zu bestimmen, erst alle auf den Punct S reducirt werden.

Setzen wir das als bekannt anzusehende Beharrungsmoment in Bezug auf die Drehachse $= T'$, die Entfernung des Schwerpuncts von der Achse $CS = d$, die auf den Schwerpunct reducirte Masse $= X$, so ist (weil $Xd^2 = T'.1^2$, § 294, Zus. 5) $X = \frac{T'}{d^2}$, mithin die Beschleunigung des Schwerpuncts $S = \frac{M \sin \alpha}{X} . g = \frac{M \sin \alpha . d^2}{T'} . g$. Die Beschleunigung des Mittelpuncts des Schwunges F nach der tangentialen Richtung ist $= g \sin \alpha$ *) (§ 229). Die Beschleunigung beider Puncte S und F verhalten sich nun aber, wie ihre Entfernungen d und l von der Achse, daher (§ 293, 3):

$$\frac{M \sin \alpha . d^2}{T'} g : g \sin \alpha = d : l$$

Es ist mithin die gesuchte Entfernung des Mittelpuncts des Schwunges von der Achse, welche man auch die Länge des physischen Pendels nennt:

$$l = \frac{T'}{Md} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

in Worten: die Länge eines physischen Pendels ist gleich seinem Beharrungsmoment, dividirt durch das statische Mo-

*) Will man diesem Punct F, als den sich frei bewegenden schweren Punct des einfachen Pendels, die Masse m beilegen, so ist die bewegende Kraft desselben $= m \sin \alpha$ und die zu bewegende Masse $= m$, daher die Beschleunigung $= \frac{m \sin \alpha}{m} . g = g \sin \alpha$.

ment seiner ganzen im Schwerpunct vereint gedachten Masse. Beide Grössen müssen also bekannt sein.*)

Setzen wir diesen, für die Länge l des physischen Pendels gefundenen Werth in die Formel (4) § 309, so hat man für die gesuchte Schwingungszeit desselben:

$$t = \pi \sqrt{\frac{T'}{M d g}} \ldots\ldots\ldots (2)$$

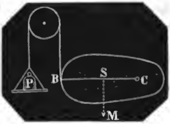
Anmerkung. Je kleiner d, je grösser t. Es kann also auch ein kurzes Pendel, wenn es nahe am Schwerpunct aufgehängt wird, sehr langsame Schwingungen machen.

312.

Aus vorstehender Gleichung folgt:

$$T' = \frac{M d . g t^2}{\pi^2}$$

und diese Gleichung kann man benutzen, um das Beharrungsmoment T' eines ganz unregelmässigen Körpers practisch zu ermitteln, wenn dessen statisches Moment Md bekannt ist. Lässt man nämlich, weil sich die Dauer einer Schwingung nicht genau beobachten lässt, das Pendel um eine horizontale Achse mehre kleine Schwingungen machen, zählt die Anzahl n derselben, sowie auch die Anzahl m der darüber verflossenen Secunden, so ist $\frac{m}{n}$ die Zeit für Eine Schwingung, und welche also für t in vorstehender Formel gesetzt werden muss. Das statische Moment Md lässt sich practisch nach § 42 bestimmen oder noch bequemer und ohne die einzelnen Factoren M und d kennen zu brauchen, indem man den Körper aus seiner Gleichgewichtslage in eine solche bringt, dass eine auf die Drehachse senk-



*) Bei der Bestimmung des statischen Moments Md sind die Entfernungen der Massenpuncte von der Drehachse oberhalb derselben als negativ zu betrachten (§ 134, Zus. 1).

rechte und gemessene Linie, z. B. $CB=r$, horizontal ist. Ist nun das nach verticaler Richtung in B wirkende Gewicht, welches den Körper in dieser Lage erhält, $=P$, das unbekannte Gewicht des Körpers $=M$ und die ebenfalls unbekannte Entfernung des Schwerpuncts S von der Drehachse $CS=d$, so ist offenbar das statische Moment $Md=Pr$. Wäre z. B. $Pr=Md=15$ und macht der Körper in $m=40$ Secunden $n=20$ Schwingungen, so ist die Zeit einer Schwingung $t=\frac{m}{n}=2''$ und folglich das Beharrungsmoment $T'=190$.

313.

Bezeichnen wir wieder mit T' das Beharrungsmoment des Pendels in Bezug auf die durch C gehende Achse, mit T und T'' die Beharrungsmomente in Bezug auf die mit ersterer parallelen, durch den Schwerpunct S und den Mittelpunct des Schwunges F gehenden Achsen (s. Fig. § 311) und mit M die Masse des Pendels, so ist, $CS=d$ und $CF=l$ gesetzt (§ 296):

$$T'=T+Md^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$T''=T+M(l-d)^2 \ldots\ldots\ldots (2)$$

Lassen wir jetzt das Pendel, statt um die Achse C, um die durch F gehende Achse schwingen, so haben wir für die Entfernung λ des neuen Mittelpuncts des Schwunges von dieser neuen Achse, indem wir nur das Beharrungsmoment T'' durch das statische Moment $M(l-d)$ dividiren, $\lambda=\frac{T''}{M(l-d)}$ (§ 311) oder für T'' seinen Werth aus (2) gesetzt:

$$\lambda=\frac{T}{M(l-d)}+l-d \ldots\ldots (3)$$

Zufolge § 311 ist $l=\frac{T'}{Md}$ oder für T' den Werth aus (1) substituirt:

$$l=\frac{T}{Md}+d \ldots\ldots\ldots (4)$$

Aus (4) folgt $T=Md(l-d)$. Substituirt man diesen Werth von T in (3), so ergiebt sich $\lambda=l$. Es hat mithin der neue Mittelpunct des Schwunges dieselbe Entfernung von der neuen

durch F gehenden Achse, wie der erstere F von der Achse C. Daher der merkwürdige Satz: dass man bei einem physischen Pendel den Mittelpunct des Schwunges F und Aufhängepunct C mit einander verwechseln kann, d. h. man kann das Pendel umkehren und den Mittelpunct des Schwunges F zum Aufhängepunct nehmen, dann ist der frühere Aufhängepunct C wieder der Mittelpunct des Schwunges und die Schwingungszeit dieselbe. Ein Pendel, welches zu solcher Verwechselung dieser beiden Puncte eingerichtet ist, heisst ein Reversionspendel.

314.

Obwohl, wegen der unvermeidlichen Reibung und des Widerstandes der Luft, wenn auch beide sehr klein sind, die Ausschlagswinkel eines physischen Pendels immer kleiner und kleiner werden und das Pendel zuletzt in Ruhe kommt, so sind doch, wenn der erste Ausschlagswinkel (und mithin auch jeder darauf folgende) so klein ist, dass derselbe (in Bogen, in Theilen des Halbmessers = 1 ausgedrückt) seinem Sinus gleich ist, die Schwingungszeiten durch die immer kleiner werdenden Bögen einander gleich (isochron), wie schon Galilei durch unmittelbare Beobachtung wahrgenommen.

Bezeichnen wir die Entfernung des Mittelpuncts des Schwunges des physischen Pendels (nämlich die Länge des mit ihm gleichzeitig schwingenden mathematischen) mit l, so ist die Zeit einer Schwingung $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ (§ 309, 4) und man sieht, dass für alle Orte der Erde, wo dieselbe Beschleunigung g Statt findet, die Zeit einer Schwingung der Quadratwurzel aus der Länge l proportional ist. Ein Pendel von 9 Fuss Länge braucht zu einer Schwingung dreimal so viel Zeit, als ein Pendel von 1 Fuss Länge.

315.

Aus der einfachen Formel:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \ldots\ldots\ldots (1)$$

ergeben sich merkwürdige Folgerungen:

1) Der Mittelpunct des Schwunges eines physischen Pendels, d. h. seine Länge l kann jetzt leicht aus einer Beobachtung gefunden werden. Lässt man nämlich ein physisches Pendel während einer beliebigen Zeit $= m$ Secunden schwingen und zählt zugleich die Anzahl der Schwingungen $= n$, welche es in dieser Zeit macht, so ist die Dauer einer Schwingung $t = \frac{m}{n}$, mithin, weil diese Dauer $\frac{m}{n} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ sein muss:

$$l = \frac{g}{\pi^2} \cdot \frac{m^2}{n^2} \ldots\ldots\ldots (2)$$

2) Hat man ein zweites Pendel, welches in derselben Zeit, $= m$ Secunden, n' Schwingungen macht, so hat man für die Länge l' desselben ebenso:

$$l' = \frac{g}{\pi^2} \cdot \frac{m^2}{n'^2} \ldots\ldots\ldots (3)$$

Die Division der beiden Gleichungen (2) und (3) giebt:

$$\frac{l}{l'} = \frac{n'^2}{n^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

d. h. die Längen verschiedener Pendel verhalten sich, wie umgekehrt die Quadrate der Anzahl Schwingungen, welche sie in derselben Zeit machen. Sind also von den Grössen l, l', n, n' drei gegeben, so kann man die vierte berechnen.

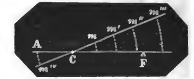
3) Durch Hülfe eines Pendels kann man die Intensität der Schwere, d. h. die Beschleunigung g, die sich mit der geographischen Breite ein wenig ändert, viel leichter und genauer, als durch Fallversuche bestimmen. Ist nämlich m und n genau beobachtet und l nach Formel (1), § 311, bestimmt, so folgt aus vorstehender Formel (2):

$$g = \frac{n^2}{m^2} \pi^2 . l \ldots\ldots\ldots (5)$$

4) Ein Pendel, welches zu einer Schwingung just Eine Secunde gebraucht (Secunden schlägt), heisst ein Secundenpendel. Für die bestimmte Länge desselben hat man, in Formel (1) $t = 1''$ gesetzt:

$$l = \frac{g}{\pi^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

316.



Mittelpunct des Stosses. An einer gewichtslos gedachten graden Stange, die in einer Ebene um einen Punct (Achse), C, schwingt, seien die Massen m, m', m''.... jede in einem Punct vereint gedacht, in den Entfernungen r, r', r'' ... von C befestigt. Diese schwingende Stange soll nun gegen einen festen Widerstand, F, treffen und die Entfernung dieses Punctes F von C so bestimmt werden, dass durch den Stoss gegen F die Achse keinen Prall erhält, in welchem Falle der Punct F Mittelpunct des Stosses heisst.

Auflösung. Im Augenblick des Treffens bildet die schwingende Stange einen im Treffpunct F unterstützten, zweiarmigen Hebel, an welchem die dynamischen Momente der Massen wirken. Sind dann die Summen der statischen Momente, welche den Hebel entgegengesetzten Sinnes um F zu drehen bestrebt sind, einander gleich oder auch, indem man die von F aus gemessenen Hebelarme nach der einen Seite als positiv und nach entgegengesetzter Richtung als negativ betrachtet, die Summe aller Momente $= 0$, so ist der Hebel vollkommen im Gleichgewicht, die Achse C erleidet dann offenbar keinen Prall; man kann sie, von der nach der Längenrichtung des Hebels wirkenden Centrifugalkraft abstrahirt, ganz wegdenken. Ist also, im Augenblick des Stosses die Winkelgeschwindigkeit der Stange $= w$, so sind die Geschwindigkeiten der Massen m, m' ... beziehlich rw, $r'w$ ... und die senkrecht am Hebel wirkenden Kräfte [dynamischen Momente (§ 266)] mrw, $m'r'w$ ... Setzt man die Entfernung des Mittelpuncts des Stosses von C, nämlich $CF = x$, so sind, mit Berücksichtigung der Vorzeichen, die von F aus gerechneten Hebelarme beziehlich $r-x$, $r'-x$, $r''-x$ ... und die statischen Momente also $mrw\,(r-x)$, $m'r'w\,(r'-x)$ ..., daher $mrw\,(r-x) + m'r'w\,(r'-x) + \ldots = 0$, woraus:*)

$$x = \frac{mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \ldots}{mr + m'r' + m''r'' + \ldots}$$

*) Für Massenpuncte, die wie m^{IV} auf der entgegengesetzten Seite von C liegen, ist sowohl r^{IV} als auch das dynamische Moment $m^{IV}.r^{IV}w$ als negativ zu betrachten (§ 130). Dass für die Masse m^{IV} der Hebelarm $=$ AF und negativ ist, ergiebt sich, wenn man im Augenblick des Stosses die Achse B wegdenkt.

317.

Vorstehender merkwürdige Ausdruck lehrt, dass der Mittelpunct des Stosses der schwingenden Massen $m, m' \ldots$ mit dem Mittelpunct des Schwunges zusammenfällt (§ 311, 1). Denn der Zähler ist offenbar nichts anders, als das Beharrungsmoment T' und der Nenner gleich dem statischen Moment, nämlich gleich dem Product aus der ganzen Masse $M = m + m' + m'' + \ldots$ in der Entfernung d ihres Schwerpuncts von der Drehachse C, so dass also:

$$x = \frac{T'}{M\,d}$$

Wäre z. B die Masse M gleichmässig über die Stange, deren Länge $= l$, verbreitet, so wäre die Entfernung des Stossmittelpuncts von der im Endpunct befindlichen Achse (§ 294):

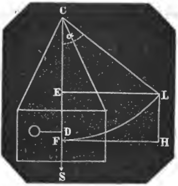
$$x' = \frac{\frac{1}{3} M . l^2}{M . \frac{1}{2} l} = \frac{2}{3} l$$

318.

Es ist ohne Weiteres einleuchtend, dass die vorhergehende Formel nicht bloss für eine schwer gedachte grade Linie (Stange), sondern für alle solche um eine Achse schwingende Körper gilt, welche durch eine durch den Schwerpunct und rechtwinklig durch die Drehachse gehende Ebene in zwei symmetrische Hälften getheilt werden und zugleich die Richtung des Stosses in dieser Ebene rechtwinklig auf der vom Schwerpunct auf die Achse gedachten Senkrechten Statt findet. Zugleich ist auch klar, dass, weil Wirkung und Gegenwirkung gleich sind, es einerlei ist, ob in dieser Entfernung des Stossmittelpuncts der Körper auf einen Widerstand stösst oder in der angegebenen Richtung gestossen wird.

Ginge die Drehachse durch den Schwerpunct, so würde in vorhergehender Formel $d = 0$ und $x = \infty$, und die Achse, weil ein endlicher Körper auch nur in einer endlichen Entfernung stossen oder gestossen werden kann, jedenfalls einen Prall erleiden.

319.



Balistisches Pendel. Zur annähernden Bestimmung der Geschwindigkeit, mit welcher eine Geschütz- oder Büchsenkugel aus der Mündung des Rohrs tritt, benutzte Robin ein sogenanntes balistisches Pendel, d. i. einen symmetrischen Körper von bedeutender Masse, der um eine in C projicirte horizontale Achse schwingen kann.

Gegen dieses ruhende, mit Thon oder einer anderen weichen Masse ausgefüllte Pendel wird nun aus einem nahe davor stehenden Geschütz eine Kugel nach horizontaler Richtung abgeschossen, die, um die Achse zu schonen, möglichst nahe durch den Mittelpunct des Stosses gehen muss. Die Grösse des ersten Ausschlagswinkels $FCL = \alpha$ lässt sich an einem Gradbogen ablesen, welchen die Spitze S des Pendels durchläuft und in weichem Wachse sichtbar macht. Es sei bekannt: die Masse des Pendels $= M$, die Masse der im Pendel stecken bleibenden Kugel $= m$. Nach erfolgtem Stosse sei gemessen: der Hebelarm der Stosskraft $CD = r$ (§ 16) und das Beharrungsmoment T, so wie die Länge des Pendels $CF = l$, nach § 312 und § 315, (2) bestimmt, so lässt sich aus diesen data die Geschwindigkeit c der stossenden Kugel bestimmen.

Statt der Masse T in der Entfernung $= 1$ kann man in D die Masse $\frac{T}{r^2}$ substituiren (§ 294, Zusatz 5). Da nun die Höhe, welche der Mittelpunct des Schwunges F erreicht, nämlich: $EF = l - l \cos \alpha$, so muss seine dadurch bestimmte anfängliche (tangentiale) Geschwindigkeit $v = \sqrt{2g.l(1-\cos \alpha)}$ sein (§ 233). Das dynamische Moment der Kugel mc setzt die auf den Punct D reducirte ruhende Masse $\frac{T}{r^2}$ in Bewegung, die anfängliche tangentiale Geschwindigkeit dieses

Puncts D ist (§ 271), Beispiel 2) $= \frac{m}{\frac{T}{r^2} + m} . c = \frac{m r^2 c}{T + m r^2}$.

Die Geschwindigkeiten der Puncte D und F verhalten sich aber wie ihre Abstände von der Achse C, daher: $\frac{m r^2}{T + m r^2} c : \sqrt{2 g l (1 - \cos\alpha)} = r : l$. Hieraus folgt (Trig. § 100):

$$c = \frac{T + m r^2}{m r} . 2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Wäre z. B. T = 43000 ℔, $m = 6$ ℔, $r = 4'$, $l = 4',1$, $\alpha = 21^0$, so wäre $c = 1976'$.

Fünfundzwanzigstes Buch.

Von der Wirkung oder Arbeit der Kräfte.

320.

Man denke sich bei einer Maschine, z. B. beim Rad an der Welle, die Kraft P so bestimmt, dass sie mit der Last Q und der Reibung F auf dem Punct der Unterbrechung des Gleichgewichts steht, so dass also unter R, r, r' die constanten Hebelarme des Rades, der Welle und des Zapfens verstanden werden (§§ 108, 115):

$$PR = Qr + Fr' \ldots\ldots\ldots (1)$$

Lässt man jetzt noch, während einer (kurzen) Zeit, eine neue Kraft, K, im Sinne der Kraft P am Umfange des Rades wirken, so muss die Maschine in eine beschleunigte Bewegung kommen. Denkt man jetzt die Kraft K wieder weggenommen, so muss offenbar die Maschine, vermöge der Beharrlichkeit der in Bewegung gesetzten Masse, sich immerfort mit der erlangten Geschwindigkeit gleichförmig bewegen, vorausgesetzt, dass, wie wir hier zuerst annehmen, die Kräfte P, Q, F und ihre Hebelarme sich nicht ändern. Die Maschine befindet sich dann im sogenannten Beharrungszustande oder dynamischen Gleichgewicht.

Multipliciren wir vorstehende Gleichung mit 2π, so ist auch:

$$P.2R\pi = Q.2r\pi + F.2r'\pi \ldots\ldots (2)$$

Nun kann man sich vorstellen, die Kräfte behalten ihren Sitz in ihren Angriffspuncten, und dann ist klar, dass, wenn die das dynamische Gleichgewicht erhaltende Kraft P (oder ihr Angriffspunct) einen ganzen Umlauf ($2\,R\,\pi$) gemacht hat, auch die Last Q und ebenso die Reibung F, jede ihren respectiven Kreis ($2\,r\,\pi$, $2\,r'\,\pi$) durchlaufen hat. Was von den ganzen Umläufen gilt, gilt offenbar auch von beliebig vielen (n) Umläufen oder von einem beliebigen $n$ten Theil, indem man (2) beiderseits mit n multiplicirt oder mit n dividirt. Setzt man $\frac{2\,R\,\pi}{n} = S$, $\frac{2\,r\,\pi}{n} = s$, $\frac{2\,r'\,\pi}{n} = s'$, so hat man auch:

$$P.S = Q\,s + F\,s' \,\ldots\ldots\ldots (3)$$

d. h. für den Beharrungszustand der Maschine muss das Product aus der denselben erhaltenden Kraft P in dem von ihrem Angriffspunct durchlaufenen Weg S immer gleich der Summe der Producte aus der Last Q und der Reibung F in den von ihren Angriffspuncten gleichzeitig durchlaufenen Wegen s und s' sein. (Vergl. § 64.)

321.

So wie man, Kürze halber, in der Statik das Product aus einer Kraft und ihrem Hebelarm statisches Moment, in der Dynamik das Product aus einer Masse und ihrer Geschwindigkeit dynamisches Moment nennt, so führen die erwähnten Producte aus einer Kraft und dem von ihrem Angriffspunct durchlaufenen Weg den Namen: **Wirkung** oder **Arbeit der Kraft**, so dass also hiernach P.S die Arbeit der Kraft P, und ebenso $Q.s$ die Arbeit der Last Q, und $F.s'$ die Arbeit der Reibung F ist.

Nimmt man in $\frac{2\,R\,\pi}{n}$, $\frac{2\,r\,\pi}{n}$, $\frac{2\,r'\,\pi}{n}$ n sehr gross, wodurch also die respectiven Wege S, s, s' sehr klein werden, so heissen die Producte PS, Qs, Fs', die **Elementar-Arbeiten** der Kräfte P, Q, F.

Wirken mehr als drei constante Kräfte, wie wir beispielshalber hier angenommen haben, an einer im Beharrungszustande befindlichen Maschine, so leuchtet ein, dass die Summe der Wirkungen (Arbeiten) aller einerlei Sinnes wirkenden constanten Kräfte gleich der Summe der Wirkungen aller ent-

gegengesetzten Sinnes wirkenden Widerstände sein muss, und dass für das dynamische Gleichgewicht diese Beziehung auch unter den Elementar-Wirkungen Statt findet.

322.

Die eine Maschine in Bewegung setzende Kraft ist im Anfange immer grösser, als zur Erhaltung eines dynamischen Gleichgewichts erforderlich ist, und deshalb muss die Bewegung der Maschine anfangs eine beschleunigte sein. Weil aber mit zunehmender Geschwindigkeit entweder die zu überwindenden Widerstände wachsen, oder die bewegende Kraft abnimmt (nicht constant bleibt), so muss die Maschine bald in den Beharrungszustand kommen und sich gleichförmig bewegen. Wird z. B. durch einen constanten Druck des Dampfes ein Schiff in Bewegung gesetzt, so wächst mit zunehmender Geschwindigkeit der Widerstand des Wassers. Wird ein Mühlrad durch darauf fallendes oder daran stossendes Wasser in Bewegung gesetzt, so muss mit zunehmender Geschwindigkeit des Rades das Wasser mit abnehmender Kraft darauf wirken.

Um also die normale Geschwindigkeit (den Gang) einer Maschine richtig zu beobachten, muss man sie erst in den Beharrungszustand kommen lassen. Die Anzahl der Umdrehungen in einer bestimmten Zeit oder die Geschwindigkeit eines jeden rotirenden oder progressiv fortschreitenden Punctes irgend eines Organs der Maschine lässt sich dann leicht ermitteln.

323.

Um den Werth einer arbeitenden Maschine richtig beurtheilen zu können, kommen, ausser der ersten Auslage, auch noch die Unterhaltungskosten und die der Betriebskraft, im Vergleich gegen das, was die Maschine dafür leistet, in Betracht. Um aber dieses zu ermitteln, müssten wir ein allgemeines Maass haben, um damit die Leistung oder Arbeit derselben messen zu können. Die Arbeiten der Maschinen sind nun aber fast ebenso verschiedenartig, als die, wenn auch nicht ganz mechanischen Arbeiten der Menschen. Die eine Maschine mahlt, eine andere sägt, spinnt, strickt etc., so

dass der Gedanke an ein allgemeines Maass, diese so sehr verschiedenen Arbeiten damit zu messen und auf bestimmte arithmetische Begriffe zurück zu führen, fast ebenso ungereimt scheint, als die verschiedenen Arbeiten der Menschen zu messen. Dennoch lässt er sich verwirklichen. Man kann nämlich die Maschine oder das eigentlich arbeitende Organ, von welcher Profession es auch sein möge, immer zwingen, statt der zu leistenden Arbeit, die doch offenbar in einem zu überwindenden Widerstand besteht, vermittelst einer Leitrolle ein solches Gewicht nach verticaler Richtung zu heben, bei welchem das betreffende Organ (der Angriffspunct des Widerstandes) dieselbe vorgeschriebene normale Geschwindigkeit behält. Kennt man dieses Gewicht P und die Höhe, auf welche es in einer bestimmten Zeit gehoben wird, so kennt man auch die Höhe h für Eine Secunde, und die Verknüpfung dieser drei Vorstellungen, oder, weil der eine Factor (Zeit von einer Secunde) immer $= 1$, schon das Product aus Gewicht und durchlaufener Höhe, nämlich $P.h$, giebt uns einen bestimmten Begriff von dem relativen Leistungsvermögen oder der Arbeit der Maschine.

324.

Es ist leicht einzusehen, dass man das Product Ph, wonach wir die Leistungen (Arbeiten) der Maschinen (während einer Secunde) beurtheilen, in zwei beliebige Factoren zerlegt denken kann.

Hebt z. B. eine Maschine (in jeder Secunde) 100 ℔. auf 6 Fuss, eine andere 600 ℔. auf 1′, eine dritte 300 ℔. auf 2′ Höhe, so leisten alle drei gleich viel, weil $100.6 = 600.1 = 300.2 = 600$.

Es ist nämlich einerlei, ob eine Maschine 600 ℔. auf 1 Fuss Höhe hebt, oder ob sie, in derselben Zeit, die Arbeit von 1 ℔. auf 1 Fuss Höhe 600mal wiederholt, oder 1 ℔. auf 600 Fuss Höhe bringt. Ferner, ob eine Maschine 300 ℔. 2 Fuss hoch hebt, oder, in derselben Zeit, 300 ℔. 2mal 1 Fuss hoch, oder 1 ℔. 600mal 1 Fuss hoch hebt.

325.

Die als Einheit gewählte Arbeit von 1 ℔. auf 1 Fuss Höhe zu heben, führt in der Maschinenlehre den Namen Fusspfund,

in Zeichen: $1^{F\text{Ԧ}}$ Hiernach wären also die Arbeitsgrössen jeder der eben erwähnten drei Maschinen $= 600^{F\text{Ԧ}}$.

Da aber die Zahlen, welche die Leistungen der Maschinen und namentlich der Dampfmaschinen ausdrücken, oft sehr gross ausfallen, so hat man zur Vermeidung derselben noch eine grössere Arbeits-Einheit in die Maschinenlehre aufgenommen, nämlich dasjenige Gewicht, welches ein gewöhnliches Arbeitspferd bei gewöhnlicher Anstrengung in jeder Secunde 1 Fuss hoch hebt, und diese Arbeit nennt man eine Pferdekraft*) (richtiger: Pferdearbeit). In Frankreich nimmt man eine Pferdekraft gleich 75 Kilogramm 1 mètre hoch, in Zeichen: 75^{km} oder 75^{mk}, was auf rheinl. Maass reducirt 510 Ԧ. 1 Fuss hoch beträgt oder $= 510^{F\text{Ԧ}}$ ist. Statt also zu sagen: ein Dampfschiff habe $30600^{F\text{Ԧ}}$ Kraft, sagt man lieber 60 Pferdekraft (weil $\frac{30600}{510} = 60$).

326.

Wenn bei einer arbeitenden Maschine eine der Kräfte oder auch ihr Hebelarm, mithin ihr Moment abwechselnd bald grösser, bald kleiner wird, wie es in der Regel der Fall ist, so kann eine solche Maschine sich offenbar nicht gleichförmig bewegen. Die Ungleichförmigkeit (Beschleunigung oder Verzögerung) wird jedoch desto geringer sein, je grösser die in Bewegung gesetzte Masse der Maschine ist, und es leuchtet schon aus § 283 ein, dass man die Masse, freilich, wegen der grössern Reibung, nur auf Kosten der die Bewegung unterhaltenden Kraft, so gross nehmen kann (Schwungrad), dass, wegen ihres Beharrungsvermögens, die Ungleichförmigkeit nicht allein fast ganz verschwindet, sondern, selbst nach gänzlicher Weglassung der die Bewegung erhaltenden Kraft, die Maschine genöthigt ist, noch eine Zeit lang sich zu bewegen, bevor sie

*) Dieses Maass soll daher entstanden sein, dass Watt gegen einen Fabrikanten, der eine Mühle durch acht Pferde bewegen liess, geäussert: er wolle ihm eine Dampfmaschine liefern, welche bei geringeren Kosten dasselbe leiste, mit derselben Kraft wirke, wie jene acht Pferde. Nach landesüblichem Maass ist in England eine Pferdekraft $= 550^{F\text{Ԧ}}$; in Oesterreich $= 430^{F\text{Ԧ}}$. Sagt man also, ein Dampfschiff habe 600 Pferdekraft, so sollte man, wegen der Unbestimmtheit dieses Maasses, dabei erwähnen, ob französisches, englisches, österreichisches etc. gemeint ist.

ganz stille steht. Wird aber die Maschine im Gange erhalten, so ist klar, dass, trotz des noch nicht ganz bestehenden dynamischen Gleichgewichts, dennoch für einen ganzen Umlauf stets die Summe der Elementarwirkungen der bewegenden veränderlichen Kraft gleich der Summe der Elementarwirkungen der entgegengesetzten Sinnes wirkenden Kräfte (Last, Reibung etc.) sein muss, und wir haben deshalb noch zu zeigen, wie man die Summation der Elementarwirkungen einer veränderlichen Kraft durch Hülfe einer geometrischen Figur bewirken kann.

327.

Der leichtern Auffassung halber stelle man sich zuerst vor, es seien bei einer sich bewegenden Maschine, z. B. beim vorhin (§ 320) erwähnten Rad an der Welle die constanten Kräfte P, Q, F im dynamischen Gleichgewicht, alsdann muss, wenn S, s, s' die Wege sind, welche ihre Angriffspuncte gleichzeitig durchlaufen, die Gleichung:

$$PS = Qs + Fs'$$

Statt finden. Da nun die Ziffern selbst keine Grössen (Zahlen), sondern nur willkürlich gewählte Erkennungszeichen sind, so ist klar, dass man die Zahlen auch durch ihnen proportionirte Linien, so wie Producte aus je zwei Factoren durch proportionirte Flächen von beliebiger Form gleichsam bildlich darstellen kann. Wählt man zur Darstellung der Producte (Wirkungen der Kräfte) in vorstehender Gleichung, weil die Kräfte hier constante sind, am einfachsten Rechtecke, und stellen die gleichzeitig durchlaufenen, nach einer beliebig gewählten Linear-Einheit ausgedrückten Wege S, s, s' die Grundlinien und P, Q, F die Höhen dieser Rechtecke dar, so muss auch die Grösse des Rechtecks P.S gleich der Summe der beiden Rechtecke Q.s und F.s' sein.

328.

Nun sei aber die Kraft, welche die Maschine in Bewegung erhält, eine veränderliche, und zwar zuerst eine solche, dass ihr Wachsthum (Abnahme) genau dem von ihrem Angriffspunct durchlaufenen Weg S proportional ist. Zu Anfang sei

sie $= 0$, am Ende des Weges $= P$, auf ein Viertel des Weges $= \frac{1}{4} P$, auf der Hälfte $= \frac{1}{2} P$ etc., alsdann lässt sich die Summe der Elementarwirkungen dieser veränderlichen Kraft durch die Fläche eines Dreiecks darstellen, dessen Grundlinie $= S$ und dessen Höhe $= P$. Da nun die Fläche dieses Dreiecks $= \frac{1}{2} P . S$, so kann man auch dieses Product statt der Fläche setzen, und die Wirkung dieser von 0 bis P gleichmässig wachsenden Kraft ist also dieselbe, als wenn sie längs des ganzen Weges beständig $= \frac{1}{2} P$ gewesen wäre.

Wäre eine solche, dem durchlaufenen Wege S proportional wachsende Kraft anfangs $= P_0$ und am Ende $= P_1$, so stellt offenbar die Fläche des Trapezes, dessen parallele Seiten P_0, P_1, und dessen Höhe S, mithin das Product $\frac{1}{2}(P_0 + P_1) . S$ die Summe der Elementarwirkungen dieser veränderlichen Kraft dar, und diese Wirkung ist also dieselbe, als wenn die von P_0 bis P_1 gleichmässig wachsende Kraft beständig $= \frac{1}{2}(P_0 + P_1)$ gewesen wäre.

329.

Ist endlich drittens das Wachsen (Abnehmen) der veränderlichen Kraft dem durchlaufenen Weg S ihres Angriffspuncts nicht proportional, so kann man dennoch mit hinreichender Annäherung die Summe ihrer Elementarwirkungen bestimmen. Man denke sich in diesem Falle den Weg S in eine Anzahl (n) gleicher Theile, je mehr, je besser, getheilt, und in jedem der Theilungspuncte die ihnen entsprechenden Werthe der veränderlichen Kraft P_0, P_1, $P_2 \ldots . P_n$ (die man kennen muss), rechtwinklig aufgetragen.

Da nun die veränderliche Kraft jedenfalls eine stetige Function von dem durchlaufenen Wege, und also die durch die Endpuncte gehende krumme Linie eine continuirliche ist, so findet man die von dieser (wenn auch unbekannten) krummen Linie, von dem ganzen Wege S und von den beiden Endordinaten P_0, P_n begrenzte Fläche, d. h. die Summe W der Elementarwirkungen genau genug, indem man die einzelnen Flächenstücke als Trapeze betrachtet, und dann ist (höhere Geometrie § 48 b):

$$W = (\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \ldots P_{n-1} + \tfrac{1}{2} P_n) . \frac{S}{n} \ldots . \quad (1)$$

oder wenn man den Weg S in eine grade Anzahl gleicher

Theile theilt, noch genauer nach der Simpson'schen Formel (höhere Geometrie § 48c):

$$W = \tfrac{2}{3}[P_0 + P_1 + P_2 + .. + P_n + (P_1 + P_3 + P_{n-1}) - \tfrac{1}{2}(P_0 + P_n)] \cdot \frac{S}{n} \ldots (2)$$

Wären z. B. auf dem vom Angriffspunct der veränderlichen Kraft P durchlaufenen Wege $S = 8$ Zoll, in gleichen Intervallen die verschiedenen Werthe $P_0 = 20$, $P_1 = 24$, $P_2 = 26$, $P_3 = 25\frac{1}{2}$, $P_4 = 21$ Pfund, so wäre $\frac{S}{n} = \frac{8}{4} = 2$ Zoll $= \frac{1}{6}$ Fuss, und die entsprechende Wirkung der veränderlichen Kraft nach der ersten Formel $W = (10 + 24 + 26 + 25\frac{1}{2} + 10\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{6} = 16$ F℔. und nach Formel (2) $W = 15\frac{1}{4}$ F℔., mithin die Wirkung dieselbe, als wenn auf der ganzen Länge des Weges $S = 8$ Zoll $=$ $\frac{2}{3}$ Fuss eine mittlere constante Kraft $= 24$ ℔. oder genauer $= 22\frac{7}{8}$ ℔. gewirkt hätte (weil $22\frac{7}{8} \cdot \frac{2}{3} = 15\frac{1}{4}$).

330.

Zur Ergänzung des über die Wirkung oder Arbeit der Kräfte Gesagten müssen wir hier noch einmal auf die bereits § 283 abgeleitete wichtige und bei der Bewegung der Maschinen fast immer zu berücksichtigende Gleichung zurückkommen. Wir haben dort gefunden, dass eine mit der Geschwindigkeit c sich bewegende blos beharrliche Masse, M, kraft ihres Beharrungsvermögens einen bestimmten in Gewicht ausgedrückten constanten Widerstand, P, auf eine durch die Gleichung:

$$s = \frac{M}{P} \cdot \frac{c^2}{2g}$$

bestimmte Länge des Weges s überwinden kann, oder was dasselbe ist, ein an die Masse M attachirtes Gewicht, P, auf die Höhe s heben kann, bevor sie zur Ruhe kommt. Hat z. B. die blos beharrliche Masse $M = 1000$ ℔. auf horizontaler Ebene die Geschwindigkeit $c = 10'$, so würde sie vermittelst eines Seils und schicklich angebrachter Leitrolle ein Gewicht $P = 200$ ℔. auf die Höhe $s = \frac{1000}{200} \cdot \frac{100}{2 \cdot 31\frac{1}{4}} = 8'$, ein Gewicht von $P = 400$ ℔. auf die Höhe $s = 4'$ und ihr eigenes Gewicht M auf die Höhe $s = \frac{c^2}{2g} = 1',6$ heben, § 223 (5).

Man sieht also, dass eine in Bewegung befindliche Masse eine Kraft enthält (gleichsam ein Magazin von Kraft ist), vermöge welcher sie eine Arbeit leisten kann, und dass die Grösse dieser Arbeit, indem man vorstehende Gleichung beiderseits mit P multiplicirt $\left(P s = M . \frac{c^2}{2g}\right)$, durch den Ausdruck $M . \frac{c^2}{2g}$ Fusspfund bestimmt ist. Dieses Product aus der Masse M und dem Factor $\frac{c^2}{2g}$ hat man den unpassenden und anstössigen Namen: lebendige Kraft der sich bewegenden Masse gegeben. Diese ist also nicht mit dem dynamischen Moment der Masse zu verwechseln, welches bei ihrer nur augenblicklichen Wirkung (Stoss) in Betracht kommt (§ 266). Bezeichnen wir die Arbeit oder Wirkung der lebendigen Kraft mit W, so ist:

$$W = M . \frac{c^2}{2g}$$

Für obiges Beispiel, wo $M = 1000$ ℔. und $c = 10'$, wäre also: $W = M . \frac{c^2}{2g} = 1600$ F℔. Die Zeit, in welcher die lebendige Kraft die Wirkung oder Arbeit W hervorbringt, kommt hierbei gar nicht in Betracht. Dies ist nur bei arbeitenden Maschinen, Menschen und Thieren der Fall, indem hier beim Vergleich ihrer Leistungen die Unterhaltungs- und Betriebskosten zu berücksichtigen sind.

331.

Unmittelbar aus vorstehender Formel, oder aus § 281, Formel 3, folgt, dass auch umgekehrt die Arbeit (Wirkung) einer constanten Kraft, P, um einer blos beharrlichen Masse, M, die Geschwindigkeit v einzuprägen, gleich der Wirkung der erzeugten lebendigen Kraft sein muss. Denn der Angriffspunct der Kraft P hat während der Zeit (indem man aus den beiden Gleichungen (1) und (2) § 281, t eliminirt) den Weg $s = \frac{M v^2}{2 P g}$ durchlaufen, und es ist die Wirkung der Kraft P, nämlich: $W = P s = \frac{M v^2}{2g}$. Hieraus lässt sich nun leicht ableiten, welche Arbeit W erforderlich ist, um eine blos beharrliche Masse, M, welche bereits die Geschwindigkeit v_0 hat,

auf die grössere Geschwindigkeit v_1 zu bringen. Die erforderlichen Arbeiten W_0 und W_1, um die Masse M von der Ruhe aus auf die Geschwindigkeiten v_0, v_1 zu bringen, sind beziehlich: $W_0 = M . \frac{v_0^2}{2g}$ und $W_1 = M \frac{v_1^2}{2g}$, mithin, weil $W = W_1 - W_0$:

$$W = M \frac{(v_1^2 - v_0^2)}{2g}$$

Diese wichtige Formel, über die Zunahme der lebendigen Kraft der Masse M oder ihre Ansammlung von Arbeit, drückt das aus, was man Princip der lebendigen Kraft nennt.

Beispiel 1. Soll eine ruhende Masse, $M = 1000$ ℔, auf einer horizontalen Ebene in eine Geschwindigkeit von $v_0 = 20'$ gesetzt werden, so ist, von der Reibung, Widerstand der Luft abstrahirt, die dazu erforderliche mechanische Arbeit $W_0 = Ps = M \frac{v_0^2}{2g} = 6400$ F℔.

Beispiel 2. Eine blos beharrliche Masse, $M = 1000$ ℔, mit der Geschwindigkeit $v_0 = 20'$, wird durch eine auf sie wirkende Kraft auf die Geschwindigkeit $v_1 = 30'$ gebracht. Welche Arbeit hat die Kraft verrichtet, oder mit anderen Worten, welche Arbeit W hat die Masse noch mehr in sich aufgenommen?

Antwort. Es ist $W = 8000$ F℔.

Beispiel 3. Eine sich mit der Geschwindigkeit $v_0 = 20'$ bewegende blos beharrliche Masse, $M = 1000$ ℔, nimmt nach und nach eine mechanische Arbeit von $W = 8000$ F℔ in sich auf. Welche Geschwindigkeit v_1 wird sie dadurch erlangen?

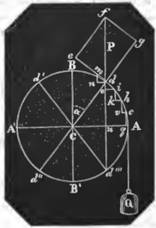
Antwort. Es ist $v_1 = \sqrt{\left(v_0^2 + \frac{2gW}{M}\right)} = 30'$. Es hat also eine Geschwindigkeitsänderung von $v_1 - v_0 = 10'$ Statt gefunden.

332.

Theorie der Kurbel. An der Peripherie einer Welle ist vermittelst einer sogenannten Kurbelwarze eine Stange eingehängt, welche durch eine constante Kraft, P (z. B. Dampfkraft), die Warze *d* wiederholt von B′ über A nach B in die Höhe zieht, und dann von B über A′ nach B′ wieder niederdrückt und dadurch die Welle sammt der auf ihren Umfang reducirten Last (Widerstand) Q in Bewegung erhält. Man

fragt, welches Verhältniss unter P und Q Statt finden muss, damit die durch die anfängliche Ueberwucht (Extrakraft) in Bewegung gesetzte Maschine in Bewegung bleibt? Der einfachern Rechnung halber nehmen wir an, dass die Stange fünfmal länger ist, als der Radius $cd = r$, in welchem Falle ihre Richtung als stets vertical betrachtet werden kann. Die Last Q denken wir uns durch ein sich aufwickelndes Seil vertical gehoben, so dass sie immer senkrecht an einem Hebelarm, $= r$, wirkt. Ferner soll von der Reibung abstrahirt, oder deren Wirkung als constant angenommen werden und mit in der Last Q begriffen sein.

Auflösung. Zuerst ist hier klar, dass, wenn die Warze, bei einer ganzen Umdrehung, sich in den sogenannten todten Puncten B und B′ des verticalen Durchmessers befindet, die Wirkung der constanten Kraft $P = 0$, in den Puncten A und A′ des horizontalen Durchmessers dagegen am grössten ist. Von B′ bis A nimmt die Wirkung der Kraft P immer zu, von A bis B wieder ab. Auf der andern Seite von B B′ findet eine gleiche Zunahme und Abnahme Statt. Die Kurbelwarze wird sich also ungleichförmig bewegen, und es muss abwechselnd eine grösste und kleinste Geschwindigkeit, v und v_0, eintreten. Soll die Maschine im Gange bleiben, so wissen wir, dass, trotz ihrer ungleichförmigen Bewegung, dennoch für jede ganze Umdrehung die Wirkung der constanten Last Q gleich der Summe der Elementarwirkungen der Kraft P sein muss, und es kommt also nur darauf an, diese Summe für einen viertel Umlauf, von A bis B, zu finden, weil in jedem der drei übrigen Quadranten dieselbe Arbeit geleistet wird.



Denken wir die Warze bis d gekommen und hier die nach Voraussetzung stets vertical wirkende Kraft $P = df$ in die radicale dg und tangentiale $de = p$ zerlegt, von welchen letztere p nur zur Erhaltung der Bewegung wirkt, so haben wir, wenn du senkrecht auf CA ist, $p : P = Cu : r$, woraus:

$p = \frac{Cu}{r} . P$.*) Für die Elementararbeit im Puncte d muss man sich den Bogen $dm = s$ so klein denken, dass er mit dem Elemente der Tangente zusammenfällt und die tangentiale Kraft p, auf diesem unendlich kleinen Weg, als constant angesehen werden kann.

Denkt man noch $mn \parallel BC$, so ist $\triangle dmn \backsim \triangle Cdu$ und folglich $s : mn = r : Cu$, woraus: $Cu = \frac{r}{s} . mn$. Diesen Werth von Cu substituirt, ist also auch $p = \frac{mn}{s} . P$, mithin im Puncte d die Elementararbeit $ps = P . mn$. Ebenso zeigt man, dass im Puncte i die Elementararbeit $= P . do$, im Puncte $h = P . ik$ etc., so dass also die Summe der Elementararbeiten durch den ganzen ersten Quadranten $= P(cq + hv + ik + do + mn + ..) = Pr$ ist, was auch vorauszusehen war, indem der Angriffspunct der constanten Kraft P, im ersten Quadranten, in verticaler Richtung nur den Weg $CB = r$ durchlaufen hat. Für eine ganze Umdrehung ist also die von der Kraft P verrichtete Arbeit $= P . 4r$ und die gleichzeitige Arbeit der Last Q, indem das Seil, woran man sie befestigt denkt, sich einmal umwickelt, mithin dieselbe auf eine Höhe, $= 2r\pi$, hebt, $= Q . 2r\pi$. Da nun $Q . 2r\pi = P . 4r$ sein muss, so ist:

$$Q = \frac{2}{\pi} . P \text{ .... } (1)$$

Wäre umgekehrt die Last Q gegeben, so ist die erforderliche, die Bewegung erhaltende Kraft:

$$P = \frac{\pi}{2} Q \text{ .... } (2)$$

333.

* Will man den Abstand desjenigen Punctes d von B, in welcher die tangentiale Kraft $p = P . \sin \alpha$ der Last $Q = \frac{2}{\pi}$ P

*) Oder auch $p = P . \sin \alpha$.

gleich ist, durch den veränderlichen Winkel α bestimmen, so folgt aus $P \sin \alpha = \frac{2}{\pi} P$, dass $\sin \alpha = \frac{2}{\pi}$, woraus:

$$\alpha = 39^0 32' 25''$$

Nimmt man $\widehat{BCd'} = \alpha$ und verlängert die Radien rückwärts nach d''' und d'', so ist die bewegende Kraft $P . \sin \alpha$ offenbar auch in den Puncten d', d'' und d''' gleich der Last Q. Von d''' bis d, d. h. in dem Intervall von $\alpha = 180^0 - 39^0\, 32'$ bis $\alpha = 39^0\, 32'$, so wie auch von d' bis d'' ist die bewegende Kraft $P . \sin \alpha$ grösser, als Q, und die Bewegung beschleunigt. Von d bis d', sowie von d'' bis d''' ist $P . \sin \alpha$ kleiner, als Q, und die Bewegung verzögert. In d und d'' findet also die grösste Geschwindigkeit v, in d' und d''' die kleinste Geschwindigkeit v_0 Statt.

334.

Die Geschwindigkeitsänderung, welche die Ueberwucht der bewegenden Kraft $P . \sin \alpha$ über die Last Q während der kurzen Zeit erzeugt, in welcher die Warze sich von d''' bis d bewegt, wird offenbar desto geringer sein, je grösser die sich mitbewegende beharrliche Masse M der Maschine ist (§ 331, Beispiel 3). Dasselbe gilt von der Geschwindigkeitsänderung, welche die Ueberwucht der Last Q über die bewegende tangentiale Kraft $P . \sin \alpha$ bewirkt, indem sich die Warze von d bis d' bewegt, in welchem Intervall die Masse M die von d''' bis d in sich aufgenommene Arbeit wieder austheilt.

Diese Ueberlegung führte auf den Gedanken, die Masse der Maschine dadurch zu vergrössern, indem man an ihre Achse ein mit-rotirendes sogenanntes Schwungrad mittelst Speichen befestigt. Die Masse desselben lässt sich dann leicht so bestimmen, dass eine im Voraus verlangte mittlere Geschwindigkeit, c, mit welcher die Maschine sich bewegen soll, von der grössten und kleinsten Geschwindigkeit v und v_0 nur sehr wenig abweicht, und die Bewegung (näherungsweise) als eine gleichförmige betrachtet werden kann. Selbstverständlich kann aber ein Schwungrad (Regulator), weil sein Gewicht die Reibung vergrössert, nur auf Kosten der bewegenden Kraft angebracht werden.

335.

Theorie des Schwungrades. Soll die Abweichung von der vorgeschriebenen mittlern (normalen) Geschwindigkeit c, welche die veränderlich wirkende tangentiale Kraft $P \cdot \sin \alpha$ verursacht, nur $\frac{1}{n} c$, mithin $v = c + \frac{1}{n} c$ und $v_0 = c - \frac{1}{n} c$ sein, so folgt erst $v + v_0 = 2c$ und $v - v_0 = \frac{2}{n} c$, und hieraus:

$$(v + v_0)(v - v_0) \text{ oder } v^2 - v_0^2 = \frac{4c^2}{n}.$$

Setzen wir die auf die Welle, d. h. auf die Entfernung $= r$ reducirt gedachte Masse des Schwungrades, in Gewicht ausgedrückt, $= T$,*) so ist die Arbeit, welche diese blos beharrliche Masse, während die Geschwindigkeit von v_0 bis v wächst, in sich aufnimmt und nachher wieder abgiebt, $= T \frac{(v^2 - v_0^2)}{2g}$ (§ 331). Diese Arbeit muss gleich sein dem Unterschied der Arbeiten der Kräfte P und Q $(= \frac{2}{\pi} P)$, indem die Warze von d''' nach d kommt. Da nun die Arbeit der Kraft P, indem ihr Angriffspunct den verticalen Weg $d''' d = 2r \cos \alpha$ durchläuft, $= P \cdot 2r \cos \alpha$ und die gleichzeitige Arbeit der Last Q, indem sie den Boden $\widehat{d''' d}$ durchläuft, $= Q \cdot \frac{180 - 2\alpha}{180} \cdot r\pi$ oder (weil $Q = \frac{2}{\pi} P) = P \cdot \frac{180 - 2\alpha}{90} \cdot r$, und folglich die Differenz beider Arbeiten $= P \cdot 2r \cos \alpha - P \frac{180 - 2\alpha}{90} r$ ist, so hat man zur Bestimmung der Masse T die Gleichung:

$$T \cdot \frac{(v^2 - v_0^2)}{2g} = 2Pr\left(\cos \alpha - \frac{90^0 - \alpha^0}{90^0}\right)$$

*) Die Masse der Stange kann unberücksichtigt bleiben, indem sich ihre Einflüsse auf die Geschwindigkeitsänderung durch das Auf- und Niedersteigen compensiren. Die Kräfte P und Q sind hier keine Massen, sondern sogenannte mechanische Kräfte. Die Kraft P (z. B. Dampfkraft) muss anfangs, um die Masse erst auf die mittlere Geschwindigkeit c zu bringen, grösser sein, als nachher zum dynamischen Gleichgewicht erforderlich ist.

oder, indem wir für α den § 333 gefundenen Werth setzen und auf T reduciren:

$$T = \frac{0,84204}{v^2 - v_0^2} \cdot P\,r\,g \ldots\ldots (1)$$

Aus dieser Gleichung geht klar hervor, dass eine vollkommen gleichförmige Bewegung durch die veränderlich wirkende Kraft P $\sin \alpha$ gar nicht möglich ist, weil für $v_0 = v$ die anzubringende Masse T unendlich gross sein müsste. Bestimmen wir deshalb die Masse so, dass die grösste und kleinste Geschwindigkeit v, v_0 von der verlangten mittleren Geschwindigkeit c nur um einen bestimmten $n$ten Theil derselben abweicht, so haben wir, $\frac{4\,c^2}{n}$ statt $v^2 - v_0^2$ substituirt:

$$T = \frac{0,21051}{c^2}\,r\,g\,n\,P \ldots\ldots\ldots (2)$$

Soll die Warze in einer Minute m Umdrehungen machen und die Wirkung der Kraft P=N Pferdekräften sein (richtiger: N Pferdearbeit übertragen), so ist, da die Wirkung der Kraft P bei einmaliger Umdrehung $= P\,4\,r$ (§ 332), also nach m Umdrehungen in einer Minute $= P\,4\,r\,m$, mithin die Arbeit in einer Secunde $= \frac{4\,r\,m}{60}$ P, und da nun N Pferdekraft $= N \cdot 510^{F\,tt.}$, mithin $\frac{4\,r\,m}{60} P = 510$ N, also $P = \frac{7650 \cdot N}{r\,m}$. Substituirt man diesen Werth von P in (2), so ist auch:

$$T = \frac{1610 \cdot g\,n\,N}{m\,c^2} \ldots\ldots\ldots (3)$$

Hier ist T, in Gewicht ausgedrückt, die Masse, welche in der Entfernung $= r$ von der Drehachse angebracht werden müsste. Setzen wir also die fragliche Masse, welche statt T in der Entfernung = R (mittleren Radius des Schwungrades) dieselbe Wirkung hervorbringt, = M, so muss $M R^2 = T r^2$ sein (§ 292). Je nachdem man nun R oder M beliebig annimmt, wie es geschehen muss, hat man dann auch die andere Grösse. Nimmt man R beliebig, so ist $M = \frac{r^2}{R^2} T$. Ist dann die radiale Breite des rechteckigen Querschnittes des Schwungrades willkürlich $= b$ genommen, so muss die Höhe

h desselben, wenn das Gewicht von einem Cubikfuss des Ringes $= p$ ist, so gross sein, dass $bh.2R\pi p = M$, woraus: $h = \frac{M}{2R\pi bp}$.*)

Man pflegt bei der Berechnung des Schwungringes, um weitläufige Formeln zu vermeiden, das Gewicht der Arme ausser Acht zu lassen. Durch diese Auslassung wird das Beharrungsmoment, mithin auch die Zahl n, in (3) grösser und der Gang der Maschine noch regelmässiger.

---

*) Ist nämlich R' der äussere, R'' der innere Radius des Schwungringes, so ist der Cubikinhalt $= h\,(R' - R'')\,(R' + R'')\,\pi = h(R' - R'').2\frac{R' + R''}{2}\pi$, wo $R' - R'' = b$ und $\frac{R' + R''}{2} = R$

V. Theil.

Hydrodynamik.

Sechsundzwanzigstes Buch.

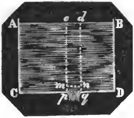
Vom Ausflusse des Wassers aus Gefässen bei constanter Druckhöhe.

336.

Da die Gesetze von der Bewegung des Wassers auch für alle anderen tropfbar flüssigen Körper gelten, so können wir ersteres wieder als Stellvertreter aller nehmen. Die Hauptfragen, welche die Hydrodynamik zu beantworten hat, betreffen die Bestimmung der Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser 1) aus Oeffnungen in Gefässen, 2) durch Röhrenleitungen, 3) in Canälen fliesst, und 4) die Wirkungen des Stosses, den es auf einen festen Körper ausübt.

337.

Es sei in dem Boden eines mit Wasser gefüllten, oben offenen Gefässes von beliebiger Form, eine, im Vergleich zur Weite des Gefässes, sehr kleine horizontale Ausflussöffnung gemacht. Wir denken uns ferner das Gefäss, ohne Erschütterung zu veranlassen, beständig voll erhalten (oder die



Weite desselben so bedeutend, dass, trotz des Statt findenden Ausflusses, dennoch die Senkung des Wasserspiegels A B erst nach einiger Zeit merklich wird). Die ganze Flüssigkeit ist dann in augenblicklicher Ruhe. Es muss deshalb eine mit der Tiefe zunehmende Spannung (Drängen) nach allen Richtungen, auch von unten nach oben, Statt finden (als wenn gleichnissweise in einem gedrängt vollen Hause Alle zugleich durch eine schmale Thür zu entweichen suchen), und wir können unter dieser Voraussetzung annehmen, dass die, an der beziehlich kleinen Ausflussöffnung befindliche, sehr dünne Wasserschicht $mpqn$, als eine blos beharrliche Masse, durch ihr eigenes Gewicht und durch das Gewicht der darüber stehenden Säule md in Bewegung gesetzt wird. Setzen wir also, in Fussmaass ausgedrückt, den Quadratinhalt der Ausflussöffnung $= a$, die sehr kleine Höbe des Prismas $mpqn = e$, den Abstand des Wasserspiegels von der Ausflussöffnung, die sogenannte Druckhöhe $cp = h$, das Gewicht der Cubikeinheit der Flüssigkeit $= p$, so ist die zu bewegende Masse $= aep$, und die bewegende Kraft $= ahp$. Die Beschleunigung der ersteren ist also (§ 280) $= \frac{ahp}{aep} g = \frac{h}{e} g$ und erlangt also, indem sie durch die kleine Höhe $mp = e$ fällt, die hier fragliche Geschwindigkeit $v = \sqrt{2 \,.\, \frac{h}{e} \,.\, ge} = \sqrt{2gh}$ (§ 223).

Die Geschwindigkeit der continuirlich ausströmenden Flüssigkeit (d. i. die Länge des Strahls nach einer Secunde) wäre also hiernach just so gross, als die Geschwindigkeit eines durch die Höhe h frei fallenden Körpers (§ 223, 5). Zu demselben Resultate gelangt man auch auf folgende anschaulichere Weise: Man denke sich das Wasserprisma cq in unendlich dünne, gleiche horizontale Schichten getheilt. Alle diese Schichten werden von der Erde gleich stark angezogen. Bei dem Statt findenden Umstande aber, dass wegen der nur kleinen Ausflussöffnung sämmtliche horizontale Schichten in augenblicklicher Ruhe sind, mithin eine Fortpflanzung des Drucks auf einander eintritt, kann man sich ferner vorstellen, dass vom Niveau abgerechnet, die zweite Schicht, wegen des Drucks der über ihr lastenden ersten Schicht, zweimal, die

dritte Schicht dreimal so stark, als die erste angezogen wird etc., mithin die unterste leicht trennbare Schicht von der Erde mit derselben Intensität angezogen wird und also auch dieselbe Geschwindigkeit v haben muss, als die oberste, allein vorhanden gedachte Schicht, indem die Anziehungskraft der Erde durch die Summe ihrer Impulse sie frei fallend durch die Höhe h treibt, und mithin $v=\sqrt{2gh}$ sein muss (§ 223, 5).

Anmerkung 1. Man sieht zugleich, dass diese Geschwindigkeit von der Natur oder dem specifischen Gewichte der ausströmenden Flüssigkeit ganz unabhängig ist. Dies ergiebt sich auch aus dem ersten Beweise, indem das Gewicht p der Cubikeinheit in der Formel gar nicht vorkommt. Bei derselben Druckhöhe h fliessen alle tropfbaren Flüssigkeiten, Wasser, Quecksilber etc., mit derselben Geschwindigkeit aus. Dies folgt auch aus § 280, nach welchem, wenn P und M in gleichem Verhältnisse wachsen oder abnehmen, die Beschleunigung $\frac{P}{M}g$ dieselbe bleibt.

Anmerkung 2. Befindet sich die k l e i n e Ausflussöffnung in einer Seitenwand des Gefässes, so versteht man unter Druckhöhe die Entfernung des Schwerpuncts dieser Oeffnung von dem Wasserspiegel.

338.

Da also bei constanter Druckhöhe, h, die zuerst ausströmende (und zugleich wieder ersetzt werdende) dünne Wasserschicht um $v=\sqrt{2gh}$ Fuss hoch nach Einer Secunde von der Oeffnung entfernt ist, so ist auch, wenn wir den Quadratinhalt der Oeffnung mit a bezeichnen, das in jeder Secunde ausfliessende Wasserquantum $=a.\sqrt{2gh}$, und man hat mithin für die Ausflussmenge M in t Secunden, in Cubikfuss ausgedrückt: $M=at\sqrt{2gh}$.

Fragen wir nun aber, wie diese theoretische Ausflussmenge mit einer leicht anzustellenden Beobachtung stimmt, so zeigt dieselbe eine kleine Abweichung von der Theorie, welche hauptsächlich von einer Art Reibung oder Adhäsion des Wassers an den Wänden der Ausflussöffnung herrührt, und weil die Flüssigkeitstheilchen von der Seite her in krummen Linien nach der Ausflussöffnung sich bewegen. Letzteres kann man wahrnehmen, wenn man in das Gefäss kleine Körperchen

(Siegellackkörner) wirft, welche mit dem Wasser gleiches specifisches Gewicht haben. Die Wasserfäden convergiren, wodurch der Querschnitt des Strahls etwas kleiner, als die Ausflussöffnung wird. Bezeichnen wir den sogenannten, durch die Erfahrung zu bestimmenden Reductionscoefficienten, womit man die theoretisch bestimmte Ausflussmenge $= a t \sqrt{2gh}$ multipliciren muss, um die wirkliche M zu erhalten, mit k, so hat man:

$$M = k a t \sqrt{2gh}.$$

339.

Was die Grösse des Erfahrungscoefficienten k betrifft, so hat man gefunden, dass:

1) für eine Ausflussöffnung in einer dünnen Wand, $k = 0{,}62$.

2) für eine Oeffnung in einer dicken Wand oder für ein kurzes Ansatzrohr, welches etwa $2\frac{1}{2}$mal so lang, als der Durchmesser der Oeffnung, oder, wenn diese ein Rechteck ist, $2\frac{1}{2}$ mal so lang, als die kleinste Seite desselben ist, $k = 0{,}82$.

Anmerkung. Diese für k gefundenen Werthe sind nur Mittelwerthe. Sie hängen von der Gestalt der Oeffnung ab, und sind bei kleineren Druckhöhen und kleineren Ausflussöffnungen ein wenig grösser.

340.

Sind, bei constanter Druckhöhe, von den vier Grössen h, a, t, M drei gegeben, so hat man die vierte nach folgenden Formeln:

$$M = k a t \sqrt{2gh} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$a = \frac{M}{k t \sqrt{2gh}} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$t = \frac{M}{k a \sqrt{2gh}} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$h = \frac{1}{2g} \cdot \left(\frac{M}{kat}\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Beispiel 1. Der Radius einer kreisrunden Oeffnung in einer

dünnen Wand ist $r = 2$ Zoll, die beständige Druckhöhe $= 5'3''$. Wie viel Wasser fliesst in einer Minute durch die Oeffnung?

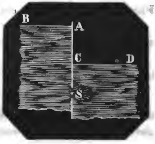
Antwort. Da hier $a = \frac{11}{126} \square'$, $h = 5\frac{1}{4}'$, $t = 60''$, $k = 0{,}62$, so ist nach Formel (1) $M = 58{,}8$ Cubikfuss.

Anmerkung. Würde auf den Wasserspiegel, mittelst eines Kolbens, dessen Grundfläche = A, noch ein besonderer Druck = P ausgeübt, so braucht man nur die Höhe h' der Wassersäule von der Grundfläche A zu berechnen, welche durch ihr Gewicht auf den Kolben denselben Druck P ausübt, und diese Höhe zu der Druckhöhe h zu addiren.

Beispiel 2. An einem Wasserbehälter, welcher in jeder Secunde = 2 Cubikfuss Zufluss erhält, befindet sich in einer dicken Wand eine reckteckige Ausflussöffnung von 3'' Breite und 2'' Höhe. Wie hoch wird im Beharrungszustande der Wasserspiegel über den Schwerpunct der Oeffnung zu stehen kommen?

Antwort. Der Beharrungszustand tritt ein, d. h. der Wasserspiegel bleibt unbeweglich, wenn der Abfluss dem Zufluss gleich wird. Hier ist also gegeben $a = \frac{1}{24} \square'$, $t = 1''$, $M = 2$ ⌀', $k = 0{,}82$, daher nach Formel (4): $h = 54',8$.

341.



Fliesst das Wasser durch eine kleine Oeffnung nicht in freier Luft, sondern unterm Wasser aus, so gelten, wenn beide Wasserspiegel, AB, CD, immer dieselbe Entfernung vom Schwerpunct S der Oeffnung behalten, erfahrungsmässig, auch für diesen Fall die § 340 aufgestellten Formeln, die beständige Druckhöhe ist hier: $h = AS - CS = AC$. Der Reductionscoefficient ist dann aber etwas kleiner, für eine dicke Wand etwa $k = 0{,}81$.

342.

Ist die Ausflussöffnung a so gross, dass die in § 337 gemachte Voraussetzung der unmerklichen Senkung des

Wasserspiegels nicht erlaubt ist, muss also, um das Gefäss stets voll zu erhalten, damit immer dieselbe Druckhöhe h Statt findet, eben so viel Wasser zufliessen, als abfliesst, so kann man sich die dadurch grösser werdende Ausflussgeschwindigkeit v durch eine vergrösserte Druckhöhe erzeugt denken. Um diese zu finden, sei die Fläche des Wasserspiegels, der, wie auch das Gefäss geformt sein möge, für eine sehr kleine Senkung als unverändert angenommen werden kann, $= A$, und die Geschwindigkeit, mit welcher sie sinkt, d. h. mit welcher das Wasser zufliessen muss, $= c$, so muss, wegen der Gleichheit unter Zufluss und Abfluss, $Ac = av$ sein. In der über der Ausflussöffnung a stehenden Wassersäule kommen also die horizontalen Schichten schon mit der Geschwindigkeit $c = \frac{a}{A} v$ an die Oeffnung.

Aus der für eine kleine Ausflussöffnung geltenden Formel $v = \sqrt{2gh}$ folgt: $h = \frac{1}{2g} . v^2$, und ebenso kann man sich die Geschwindigkeit $\frac{a}{A} v$ durch den Druck einer zweiten über der Ausflussöffnung stehenden Wassersäule erzeugt denken, deren Höhe $= \frac{1}{2g}\left(\frac{a}{A} v\right)^2$. Diese Druckhöhe muss also zu der eigentlichen Druckhöhe h hinzu kommen, mithin in erstere Formel $h + \frac{1}{2g}\frac{a^2}{A^2} v^2$ statt h gesetzt werden, und dadurch verwandelt sich diese Formel in $v = \sqrt{2g(h + \frac{1}{2g}\frac{a^2}{A^2} v^2)}$, und hieraus, indem man auf v reducirt, $v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}}$. Für die in t Secunden ausfliessende Masse M hat man also, mit Hinzufügung des Reductionscoefficienten k, die genauere Formel:

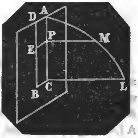
$$M = \frac{kat\sqrt{2gh}}{\sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right)}}$$

in der Regel ist aber a gegen A so klein, dass man den Bruch $\frac{a^2}{A^2}$ vernachlässigen und $M = kat\sqrt{2gh}$ setzen kann.

343.

Wir haben bisher immer angenommen, dass die verticale Höhe der Ausflussöffnung in einer Seitenwand gegen die Entfernung ihres Schwerpuncts vom Wasserspiegel nur sehr klein war, und konnten deshalb, zur Vereinfachung der Formeln, als mittlere Geschwindigkeit diejenige nehmen, welche die durch den Schwerpunct der Oeffnung gehende horizontale Schicht des ausfliessenden Strahls hat. Diese Annahme ist aber nicht mehr gestattet, wenn die Höhe der Oeffnung bedeutend ist, und deshalb die Geschwindigkeiten der ausfliessenden horizontalen Schichten sehr verschieden sind.

Nehmen wir zuerst an, die rechteckige Schützenöffnung A B reiche bis zum Wasserspiegel eines grossen Behälters (Sammelteichs, Canals), dessen Niveau eine lange Zeit constant bleibt. Sei die Höhe der Oeffnung $AC = h$, die Breite $BC = b$.



Denken wir uns einen verticalen Wasserfaden, A C, so haben die verschiedenen Puncte desselben desto grössere Geschwindigkeit, je tiefer sie unter dem Niveau liegen. Sei $AP = x$ die Druckhöhe eines Punctes, P, so ist dessen Geschwindigkeit $= \sqrt{2gx}$. Denken wir für x alle möglichen Werthe (Abscissen) von $x = 0$ bis $x = h$ gesetzt und die entsprechenden Geschwindigkeiten, als Ordinaten, rechtwinklig an ihre Abscissen angetragen, so dass also $MP = \sqrt{2gx}$, $BL = \sqrt{2gh}$ etc. ist, so liegen die Endpuncte aller dieser Ordinaten in einer Parabel, AML, deren Parameter $= 2g$ (höhere Geometrie § 24). Die über einander liegenden Punete, wie A, P, C etc. des verticalen Wasserfadens befinden sich nach Einer Secunde in den ihnen entsprechenden Puncten A, M, L des Parabelbogens AML. Es ist also klar, dass in einer Secunde ein prismenartiger Wasserkörper ausfliesst, dessen Grundfläche die Parabelfläche AMLC, und dessen Höhe gleich der Breite der Ausflussöffnung $BC = b$ ist. Da nun die Parabelfläche $= \frac{2}{3} AC.CL = \frac{2}{3} h\sqrt{2gh}$ ist (höhere Geometrie § 48a), so ist, mit Hinzufügung des Reductionscoefficienten k, die in Einer Secunde ausfliessende Wassermenge $= \frac{2}{3} kbh\sqrt{2gh}$. Man hat also für t Secunden:

$$M = \tfrac{2}{3} k t b h \sqrt{2gh} \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$b = \frac{3\,M}{2 k t h \sqrt{2gh}} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{1}{2g} \cdot \left(\frac{3\,M}{2ktb}\right)^2} \ldots\ldots (3)$$

Anmerkung. Ist die Höhe der Oeffnung beträchtlich, so senkt sich der Wasserspiegel, ehe er noch die Mündung erreicht, und die Druckhöhe h muss deshalb, nach Eitelwein, da gemessen werden, wo die Senkung noch nicht Statt findet.

Beispiel. Es sei $h = 2'$, $b = 3'$, $t = 1''$, $k = 0{,}62$, so ist: $M = 27{,}7\ \Phi'$.

344.

Liegt die obere Seite EP der rechteckigen Ausflussöffnung nicht, wie eben angenommen, im Wasserspiegel selbst, sondern um die Höhe $AP = h'$ tiefer, so braucht man nur, um die Ausflussmenge zu finden, von der ganzen Parabelfläche $ALC = \tfrac{2}{3} h \sqrt{2gh}$ das Stück $AMP = \tfrac{2}{3} h' \sqrt{2gh'}$ abzuziehen, und man hat dann:

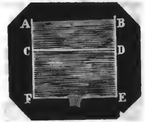
$$M = \tfrac{2}{3} k b t \,(h \sqrt{h} - h' \sqrt{h'}) . \sqrt{2g}.$$

Beispiel. Für $h = 5'$, $h' = 3'$, $b = 3'$, $t = 1''$, $k = 0{,}62$ ist $M = 58{,}6\ \Phi'$.

Siebenundzwanzigstes Buch.

Ausfluss des Wassers aus prismatischen Gefässen bei sinkendem Niveau.

345.



Fliesst das Wasser durch eine kleine Oeffnung im Boden oder in der Seitenwand eines prismatischen Gefässes, welches keinen Zufluss erhält, so muss der Wasserspiegel immerfort sinken, die Druckhöhe und folglich auch die Ausflussgeschwindigkeit immer kleiner werden. Etwa 3,7 Zoll von der Ausflussöffnung entfernt wird aber der erfahrungsmässig bis dahin immer horizontale Wasserspiegel auf einmal unruhig; es bildet sich eine Art Trichter (Strudel), in welchen die Luft eindringt und von jetzt an den Ausfluss etwas verzögert. Von diesem Trichter abstrahirt, soll nun die Zeit T gefunden werden, in welcher ein prismatisches Gefäss, dessen Querschnitt $= A$, Ausflussöffnung $= a$ und anfängliche Druckhöhe $= h$ ist, sich ganz leert.

Da die anfängliche Ausflussgeschwindigkeit $= \sqrt{2gh}$ ist und gleichmässig verzögernd (gerade so, wie beim verticalen

Aufsteigen eines Körpers) bis zu Null abnimmt, so kann man, was die Dauer T des Ausflusses betrifft, annehmen, die Geschwindigkeit sei stets die mittlere, nämlich $\frac{1}{2}\sqrt{2gh}$, gewesen. Denn wird ein Körper mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ vertical aufgeworfen, so erreicht er die Höhe h, und zwar in $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ Secunden (§ 223). In derselben Zeit würde er aber mit der mittleren Geschwindigkeit $\frac{1}{2}\sqrt{2gh}$ dieselbe Höhe erreichen, weil $\frac{1}{2}\sqrt{2gh}.\sqrt{\frac{2h}{g}}=h$. Da nun bei dieser mittleren Geschwindigkeit $\frac{1}{2}\sqrt{2gh}$ die Ausflussmenge in jeder Secunde $=ka.\frac{1}{2}\sqrt{2gh}$ und der Cubikinhalt des Gefässes $=h\text{A}$ ist, so hat man für die Zeit T, in welcher dasselbe sich ganz leert, $\text{T}=\frac{h\text{A}}{ka.\frac{1}{2}\sqrt{2gh}}$ oder:

$$\text{T}=\frac{2\text{A}.\sqrt{h}}{ka\sqrt{2g}}$$

346.

Aufgabe. Die Zeit t zu finden, in welcher der Wasserspiegel im vorhin erwähnten prismatischen Gefässe von der Höhe $\text{EB}=h$ bis auf die Höhe $\text{ED}=h'$ herabsinkt.

Auflösung. Man muss offenbar von der Zeit, in welcher das ganze Gefäss AE sich leert, die Zeit subtrahiren, in welcher das Gefäss CE sich leert, und hat dann:

$$t=\frac{2\text{A}}{ka\sqrt{2g}}(\sqrt{h}-\sqrt{h'}).$$

Beispiel. Sei $\text{A}=10\square'$, $a=2\square''=\frac{1}{72}\square'$, $h=12'$, $h'=8'$, $k=0{,}81$, so ist: $t=222''$.

347.

Aufgabe. An einem prismatischen Wasserbehälter, dessen Querschnitt $\text{A}=1200\square'$, wird durch Aufziehen einer Schütze eine rechteckige Ausflussöffnung von 2′ Breite, 4″ verticaler Höhe, also $a=\frac{2}{3}\square'$, gemacht. Die anfängliche Höhe des Wasserspiegels über dem Schwerpunct der kleinen Ausfluss-

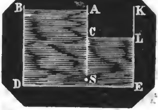
öffnung ist $h = 10'$. Wie hoch (h') wird der Wasserspiegel noch nach $t = 20' = 1200''$ stehen, wenn $k = 0{,}7$.

Auflösung. Man reducire vorhergehende Formel auf h', so hat man:

$$h' = \left(\sqrt{h} - \frac{k a t \sqrt{2g}}{2A}\right)^2$$

$$h' = 1',8.$$

348.



Aufgabe. Aus einem grossen Wasserbehälter, AD (einem Teiche, Canal etc.), fliesst das Wasser durch eine kleine Schützenöffnung in einen anderen prismatischen Behälter, AE (Schleusenkammer). In welcher Zeit T wird der Wasserspiegel im letztern mit dem im erstern in einerlei Niveau sein, wenn der Wasserspiegel AB constant bleibt (die Senkung nicht merklich ist). Es sei die Druckhöhe $AS = h$, die Durchflussöffnung $= a$, der horizontale Querschnitt des zu füllenden Gefässes $= A$ und $k = 0{,}81$.

Auflösung. Da die anfängliche Ausflussgeschwindigkeit $= \sqrt{2gh}$ wegen des wachsenden Gegendrucks gleichmässig verzögernd bis zu Null abnimmt, so ist die mittlere Geschwindigkeit $\frac{1}{2}\sqrt{2gh}$ und folglich ganz wie in § 344:

$$T = \frac{2A.\sqrt{h}}{ka\sqrt{2g}}$$

349.

Aufgabe. In welcher Zeit t wird der Wasserspiegel im zweiten, anfangs leeren Gefäss um die Höhe $KL = h'$ tiefer, als im erstern stehen?

Auflösung. Man hat hier wieder, wie in § 345:

$$t = \frac{2A}{ka\sqrt{2g}}(\sqrt{h} - \sqrt{h'})$$

350.

Aufgabe. Nach welcher Zeit T werden die Wasserspiegel zweier communicirender prismatischer Gefässe (Schleusenkammern) in einerlei Niveau stehen, wenn die Querschnitte beider beziehlich $A = 3000 \,\square'$, $A' = 2000 \,\square'$, die kleine Durchflussöffnung $a = 10 \,\square'$, die Entfernung der Wasserspiegel vom Schwerpunct dieser Oeffnung $h = 12'$, $h' = 1'$ und $k = 0{,}6$?

Auflösung. Suchen wir erst die Höhe x, um welche das Niveau im zweiten Gefäss steigt, so ist (§ 172) $x = \frac{(h-h')\,A}{A+A'}$, mithin der im zweiten Gefässe auszufüllende Raum $= A'x = \frac{(h-h')\,AA'}{A+A'}$. Da nun die anfängliche Geschwindigkeit $= \sqrt{2g\,(h-h')}$ und stetig bis Null abnimmt, folglich die mittlere Geschwindigkeit $= \frac{1}{2}\sqrt{2g\,(h-h')}$ und der Durchfluss in jeder Secunde $= ka \,.\, \frac{1}{2}\sqrt{2g(h-h')}$ ist, so hat man: $Tka \,.\, \frac{1}{2}\sqrt{2g(h-h')} = \frac{AA'(h-h')}{A+A''}$ und hieraus:

$$T = \frac{2\,AA'\sqrt{h-h'}}{ka(A+A')\sqrt{2g}}$$

$$T = 168''.$$

Achtundzwanzigstes Buch.

Vom Stosse des Wassers gegen feste Körper und umgekehrt.

351.

Wenn fliessendes Wasser auf einen festen Körper trifft, so wird es mit einer gewissen Kraft auf den Körper wirken und ihn fortzuschieben bestrebt sein.

Um diese Kraft zu bestimmen, müssen wir drei Fälle unterscheiden, nämlich: 1) den Stoss eines isolirten (d. h. nur von der Luft umgebenen) Wasserstrahls auf eine Fläche, 2) den Stoss des durch ein Gerinne (Canal) begrenzten Wassers auf eine Fläche, die nur wenig kleiner, als der Querschnitt des Gerinnes ist, und 3) den Stoss im sogenannten unbegrenzten Wasser, in einem Flusse z. B., oder See.

352.

Nehmen wir zuerst den Fall, ein isolirter, mit der Geschwindigkeit c continuirlich fliessender horizontaler Wasserstrahl treffe senkrecht auf eine verticale Ebene (Tafel). Die Erfahrung lehrt nun, dass man diese Tafel mittelst einer schicklich angebrachten Leitrolle durch ein in entgegengesetzter Richtung des Strahls wirkendes Gewicht, P, an ihrer Stelle erhalten kann. Hieraus folgt aber, dass die Wirkung des auf die Tafel treffenden Strahls nicht mit der Wirkung eines

reinen Stosses verglichen werden kann, welche ein fester Körper auf die Tafel ausüben würde. Denn ein solcher, in unmessbar kleiner Zeit, Statt findender Stoss würde sich durch kein Gewicht aufheben lassen, vielmehr die Tafel, durch welches Gewicht sie auch fest gehalten werden möge, in Bewegung setzen (§ 271, Anmerkung 1). Die Wirkung des Wasserstrahls ist vielmehr als ein eigenthümlicher constanter Druck auf die Tafel zu betrachten, den man deshalb auch den hydraulischen Druck nennt. Dies erhellet auch folgendermaassen: Wegen der leichten Verschiebbarkeit der Theilchen eines tropfbar flüssigen Körpers und Fortpflanzung des Drucks muss stets die vordere verticale dünne Schicht des horizontalen Wasserstrahls durch den Druck der nachfolgenden sich auf der Tafel ausbreiten und abfliessen. Dasselbe gilt von allen folgenden Schichten, welche nicht alle zugleich, sondern successiv an die Tafel gelangen und zur Wirkung kommen. Ist die Geschwindigkeit des Strahles $= c$, z. B. $= 12'$, so kommt die verticale Schicht, welche von der zuerst treffenden $c = 12'$ entfernt ist, eine Secunde später an die Tafel.

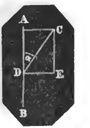
Um nun diesen hydraulischen Druck P näher zu bestimmen, sei die Masse des in jeder Secunde mit der Tafel in Contact kommenden Wasserstrahls von c Fuss Länge, in Gewicht ausgedrückt, $=$ M, dann muss offenbar, da Wirkung und Gegenwirkung immer gleich sind, die Tafel mit einer solchen constanten Kraft, P, entgegenwirken, welche der sich bewegenden Masse M in Einer Secunde die Geschwindigkeit c ganz entzieht. Da nun einer blos beharrlichen Masse, M, welche die Geschwindigkeit von $g = 31\frac{1}{4}'$ hat, durch ihr eigenes vertical wirkendes Gewicht M (man denke sie sich in die Höhe geworfen) diese Geschwindigkeit g in Einer Secunde allmälig ganz entzogen wird, so ist klar, dass, so viel mal c grösser oder kleiner als g ist, so viel mal auch P grösser oder kleiner als M sein muss, daher: $P : M = c : g$, woraus: $P = \frac{Mc}{g}$ oder auch, wenn man den Querschnitt des Strahls, in Quadratfuss ausgedrückt, $= a$, das Gewicht eines Cubikfuss Wassers $= \gamma$ setzt, mithin die per Stunde ausfliessende Wassermasse $M = a c \gamma$ ist, so ist auch:

$$P = \frac{a \gamma c^2}{g}$$

353.

Befindet sich im Boden oder in der Seitenwand eines mit Wasser gefüllten Gefässes eine zu öffnende kleine Klappe, deren Quadratinhalt $=a$ und die Entfernung ihres Schwerpuncts vom Wasserspiegel $=h$ ist, so ist der statische Druck auf diese Klappe $=ah\gamma$. Oeffnet man die Klappe, so fliesst das Wasser mit der Geschwindigkeit $c=\sqrt{2gh}$ aus, und der hydraulische Druck auf eine etwas von der Oeffnung entfernte, auf der Richtung des Strahls senkrechte Tafel wäre $=\frac{a\gamma.2gh}{g}=2ah\gamma$, also doppelt so gross, als der statische. Vorstehende Formel gilt nämlich auch für einen verticalen Strahl, vorausgesetzt, dass das Wasser von der getroffenen horizontalen Tafel gleich abfliesst, also nicht auch noch mit seinem Gewichte darauf drückt; ausserdem muss die Fläche der Tafel zehn- bis zwölfmal so gross sein, als die Ausflussöffnung, und von dieser um etwa den dreifachen Durchmesser derselben entfernt sein. Ist die Fläche just so gross, als der Querschnitt des Strahls, so zeigt die Erfahrung, dass der hydraulische Druck dann nur halb so gross ist. Die Wasserfäden werden dann am Rande der Tafel von ihrer Richtung etwas abgelenkt, kommen deshalb nicht alle zur Wirkung, auch können sie sich dann nicht auf der Tafel ausbreiten.

354.



***Aufgabe.** Ein isolirter Wasserstrahl CD, trifft mit der Geschwindigkeit c, unter einem Winkel α, auf eine feste Tafel, AB. Welchen Druck P hat dieselbe auszuhalten, wenn der Querschnitt des Strahls $=a$ ist?

Auflösung. Wäre der Strahl normal gegen die Tafel gerichtet, so wäre der hydraulische Druck $=\frac{a\gamma c^2}{g}$. Da dies aber nicht der Fall ist, und eine Fläche nur nach einer auf ihr senkrechten Richtung einer Druckkraft das Gleichgewicht halten kann, so müssen wir die Kraft $\frac{a\gamma c^2}{g}$ in zwei Composanten zer-

legen, eine parallel mit AB, die andere senkrecht auf AB. Nur letztere übt einen Druck aus und dieser ist:

$$P = \frac{a\gamma c^2}{g} \sin\alpha.$$

355.

Aufgabe. Ein isolirter Wasserstrahl vom Querschnitt $= a$ fliesst continuirlich mit der Geschwindigkeit C normal gegen eine ebene Tafel, welche aber mit der Geschwindigkeit c desselben Sinnes ausweicht (wie die Schaufeln an einem Wasserrade). Welchen Druck P hat die sich bewegende Tafel auszuhalten $(C > c)$?

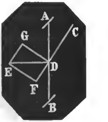
Auflösung. Hier kommt offenbar per Secunde nur ein Wasserstrahl mit der relativen Geschwindigkeit $C - c$ zur Wirkung, und man muss deshalb in der Formel § 351 $C - c$ statt c setzen. Es ist dann:

$$P = \frac{a\gamma (C - c)^2}{g}$$

Zusatz. Bewegt sich die Tafel dem Strahle gerade entgegen, so ist der hydraulische Druck:

$$P = \frac{a\gamma (C + c)^2}{g}$$

356.



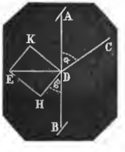
* **Aufgabe.** Ein Wasserstrahl vom Querschnitt $= a$ und Geschwindigkeit $= c$ treffe unter einem Winkel, $= \alpha$, eine ruhende Tafel, welche nur nach der Richtung des Strahles CD ausweichen kann. Mit welcher Kraft P wird die Tafel nach dieser Richtung gedrückt?

Auflösung. Weil die Tafel nur nach der Richtung CD ausweichen kann, so kann man annehmen, sie bewege sich zwischen zwei mit CD parallelen festen Schienen, A, B. Dann ist aber klar, dass der auf der Tafel senkrechte Druck $DE = \frac{a\gamma c^2}{g} \sin\alpha$ (§ 353)

wiederum in zwei Composanten, DF, DG, zerlegt werden muss, erstere nach der Richtung der Bewegung und letztere darauf senkrecht, damit sie von der Schiene bei A aufgehoben werden kann. Da nun $\widehat{EDG}=\alpha$, so ist der nach der Richtung DF Statt findende Druck $P = DE . \sin\alpha$ oder:

$$P=\frac{a\gamma c^2 \sin^2\alpha}{g}$$

357.



* **Aufgabe.** Wie gross wird in der vorhergehenden Aufgabe der Druck sein, wenn die Tafel nur nach der Richtung DH ausweichen kann und $\widehat{HDB}=\beta$ ist?

Auflösung. Zerlegen wir den normalen Druck $DE=\frac{a\gamma c^2 \sin\alpha}{g}$ (§ 353) nach DH und nach der darauf senkrechten Richtung DK, so ist, weil $\widehat{KDE}=\beta$, der Druck nach der Richtung DH, nämlich:

$$P=\frac{a\gamma c^2 \sin\alpha \sin\beta}{g}$$

358.

Befindet sich ein cylindrischer oder prismatischer Körper im Wasser ganz untergetaucht, so sollte man glauben, dass der hydraulische Druck ganz derselbe sein müsse, ob das Wasser gegen die Grundfläche des darin festgehaltenen Körpers, oder umgekehrt die Grundfläche des Körpers mit derselben Geschwindigkeit gegen das ruhend gedachte Wasser stösst. Dies soll erfahrungsmässig jedoch nur dann einerlei sein, wenn die Länge des Körpers wenigstens 8 mal grösser ist, als der Durchmesser der Grundfläche. Ist die Länge kleiner, so soll der Druck des Wassers gegen den festen Körper ein wenig grösser sein, als umgekehrt. Die Erfahrung lehrt ferner, dass ein solcher Druck im unbegrenzten Wasser fast nur halb so gross ist, als er nach der Theorie sein sollte (§ 352), so dass also, wenn a den Inhalt der drückenden oder

gedrückten Fläche, c die Geschwindigkeit des Körpers oder des Wassers, k einen Erfahrungscoefficient und P den normalen Druck bezeichnet, hier:

$$P = \frac{k a \gamma c^2}{2g} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Weicht der Körper mit der Geschwindigkeit c_0 aus, so ist:

$$P = \frac{k a \gamma (c - c_0)^2}{2g} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Bewegt sich der Körper dem Strome mit der Geschwindigkeit c_0 entgegen, so ist:

$$P = \frac{k a \gamma (c + c_0)^2}{2g} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Zusatz. Ist die Länge des prismatischen Körpers acht- oder mehrmal grösser, als der Durchmesser, so soll $k = 1{,}39$ sein. Ist die Länge nur doppelt so gross, so setzt man, wenn das Wasser auf den Körper stösst, $k = 1{,}34$ und, wenn umgekehrt der Körper auf das Wasser stösst, $k = 1{,}3$. Für eine dünne Tafel soll im ersten Fall $k = 1{,}86$, und umgekehrt $k = 1{,}25$ sein.

359.

Aufgabe. Ein Cylinder soll sich nach der Richtung seiner Achse mit der Geschwindigkeit von 6 Fuss in ruhigem Wasser bewegen. Welcher constante Widerstand ist hier zu überwinden, wenn die Länge des Cylinders $= 4'$, der Radius $= 1'$?

Auflösung. Da hier $a = \pi = 3\frac{1}{7}\ \square'$, $\gamma = 66$ ℔., $c = 6'$, $k = 1{,}3$, so ist $P = 155$ ℔.

360.

Aufgabe. Ein eiserner Cylinder sinkt mit verticaler Achse im Wasser. Welche Endgeschwindigkeit, c, wird er erlangen, wenn der Radius der Grundfläche $r = \frac{1}{2}'$, seine Achse $h = 2\frac{1}{3}'$, ein Cubikfuss Wasser $\gamma = 66$ ℔. wiegt und das specifische Gewicht des Eisens $s = 7$ ist?

Auflösung. Der Cubikinhalt des Cylinders ist $h r^2 \pi$, sein

Gewicht also $= h r^2 \pi s \gamma$. Durch den Auftrieb verliert der Cylinder am Gewicht $h r^2 \pi \gamma$. Die constante Kraft, die den Cylinder in Bewegung setzt, ist also $P = h r^2 \pi \gamma\ (s-1)$. Der Cylinder wird nun so lange beschleunigend sinken, bis der mit dem Quadrate der Geschwindigkeit stets wachsende Widerstand des Wassers (der Gegendruck) $= P$ wird, alsdann muss der Cylinder, als eine blos beharrliche Masse, sich mit der erlangten fraglichen Geschwindigkeit c immerfort gleichmässig bewegen. Aus der Formel (1) § 358 folgt, da hier $a = r^2 \pi$ und $k = 1{,}3$:

$$c = \sqrt{\frac{2 g h (s-1)}{k}}$$

$$c = 26'.$$

Anmerkung. Der hydraulische Druck auf eine krumme, durch ihre Gleichung gegebene Fläche lässt sich nur durch Infinitesimalrechnung bestimmen. In der **Praxis** (z. B. beim Bau der Schiffe) werden die betreffenden Näherungsformeln in der Regel durch Versuche bestimmt. Ueberhaupt ist die Theorie von der Bewegung tropfbar flüssiger, und vielmehr noch die der luftförmigen Körper sehr weit von der Stufe der Vollkommenheit entfernt, welche die Dynamik der festen Körper bereits erreicht hat.

VI. Theil.

Aërodynamik.

Neunundzwanzigstes Buch.

Vom Ausflusse der Luft aus Behältern.

361.

Man denke sich ein oben offenes prismatisches Gefäss, dessen verticale Wände bis zur Grenze der Atmosphäre reichen. In dem Boden werde eine kleine Oeffnung gemacht, und unterhalb derselben befinde sich ein absolut leerer Raum, so dass kein Luftdruck von unten nach oben auf die Oeffnung Statt findet. Unter dieser Voraussetzung muss, wegen des vorhandenen Drucks von innen nach aussen, nothwendig Luft in den leeren Raum ausfliessen, und es fragt sich jetzt, mit welcher Geschwindigkeit v dies geschieht?

Die über der Ausflussöffnung stehende Luftsäule kann man leicht auf eine andere reduciren, welche denselben Druck auf die untere Luftschicht ausübt und dabei durchgehends dieselbe Dichtigkeit hat, wie die zuerst ausfliessende untere Schicht. Dann aber kann man auf diese Luftsäule, welches auch ihre gleichmässige Dichtigkeit sein möge, ganz dieselben Schlüsse anwenden, als wenn sie irgend eine tropf-

bare Flüssigkeit (Wasser, Quecksilber etc.) wäre (§ 337, Anmerkung 1), so dass also, indem wir die erst zu bestimmende Höhe (Druckhöhe) dieser überall gleich dichten Luftsäule mit h bezeichnen, die theoretische Ausflussgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ sein muss, oder mit Hinzufügung des durch die Erfahrung zu bestimmenden Reductionscoefficienten k, der für Oeffnungen in dünnen Wänden $= 0{,}65$ und für kurze Ansatzröhren $= 0{,}93$ angenommen wird, für die wirkliche Ausflussgeschwindigkeit $v = k\sqrt{2gh}$.

Da nun (§ 209) bei 0° Temperatur und $28'' = 2\frac{1}{3}'$ Barometerstand die Luft nahe 10560 mal dünner, als Quecksilber ist, so muss die fragliche Höhe der gleichmässig dichten Luftsäule, welche der Quecksilbersäule von $28'' = 2\frac{1}{3}'$ Höhe das Gleichgewicht hält, nämlich $h = 10560 . 2\frac{1}{3}' = 24640'$, und mithin die theoretische Geschwindigkeit, mit welcher die Luft an der Oberfläche der Erde in den leeren Raum dringt, $v = \sqrt{2 . 31\frac{1}{4} . 24640} = 1241$ Fuss sein, wobei es offenbar gleichgültig ist, ob die Ausflussöffnung sich im Boden oder in der Seitenwand des Gefässes befindet. Eine Kugel, welche sich mit einer etwas grösseren Geschwindigkeit bewegt, würde einen augenblicklich leeren Raum hinter sich lassen.

362.

Weil ferner die nicht eingeschlossene Luft mit jedem Grade der Temperaturänderung sich um den $0{,}00366 = 0{,}004$ten Theil ihres Volumens ausdehnt (dünner wird), mithin auch die für 0° bestimmte Höhe der Luftsäule $h = 24640'$ um den ebensovielten Theil grösser werden muss, so ist für t Grad Wärme die Höhe der gleichmässig dichten Luftsäule $= h + 0{,}004\ th = h\ (1 + 0{,}004\ t)$ und mithin die Ausflussgeschwindigkeit: $v = k\sqrt{2gh\ (1 + 0{,}004\ t)}$, oder, für g und h ihre Werthe gesetzt:

$$v = 1241\, k\sqrt{(1 + 0{,}004\ t)}.$$

Beispiel. Für $t = 10^\circ$, $k = 1$, wäre $v = 1251'$. Für $t = -10^\circ$ ist $v = 1216'$.

363.

Befindet sich atmosphärische Luft, bei 28″ Barometerstand und 0 Grad Temperatur, in einem Reservoir eingeschlossen,

so würde sie doch denselben Druck auf eine Ausflussöffnung ausüben, als die in § 361 erwähnte Luftsäule von der Höhe $h = 24640'$, indem man sich ja den Druck durch eine Luftsäule von dieser Höhe erzeugt denken kann. Sie würde also auch wieder mit derselben Geschwindigkeit von 1241 Fuss in den leeren Raum strömen. Aendert sich die Temperatur der eingeschlossenen Luft um t^0, so wird die Expansionskraft grösser, folglich auch, weil die Dichtigkeit dieselbe bleibt, die Druckhöhe wieder $= h\ (1 + 0{,}004\ t)$, mithin für $t = 10^0$, $k = 1$, die Ausflussgeschwindigkeit in den leeren Raum $= 1251$ Fuss. Wird die in einem Reservoir eingeschlossene atmosphärische Luft etwa durch einen luftdicht schliessenden Kolben comprimirt und m z. B. 4mal dichter, so muss sie dennoch mit derselben Geschwindigkeit in den leeren Raum ausströmen. Der Druck ist jetzt allerdings 4mal grösser, dafür aber die in Bewegung zu setzende Masse der ausfliessenden Schicht auch 4mal grösser. Dies erhellet auch folgendermaassen. Ist die Luft durch Comprimirung 4mal so dicht geworden, so hält sie auch einer 4mal so hohen Quecksilbersäule das Gleichgewicht. Da nun aber z. B. bei 0^0 Temperatur das Quecksilber jetzt nicht 10560, sondern nur $\frac{1}{4} . 10560$mal so dicht, als die comprimirte Luft ist, so ist auch die Höhe der gleichmässig dichten, den 4mal grösseren Druck erzeugenden Luftsäule $h = 4 . 2\frac{1}{3} . \frac{1}{4} . 10560 = 24640$ Fuss.

So lange also das Mariot'sche Gesetz zwischen Druck und Dichtigkeit und dieselbe Temperatur Statt findet, muss die in einem Reservoir enthaltene Luft immer mit derselben Geschwindigkeit $v = 1241\,k . \sqrt{(1 + 0{,}004\ t)}$ in den leeren Raum strömen. Denn ist die Luft im Behälter 2, 3, .. $m$mal dünner, also auch der Druck (Barometerstand) eben so viel mal kleiner geworden, so wird gleichzeitig auch die zu bewegende Masse eben so viel mal geringer. Die Geschwindigkeit, mit welcher die Luft (oder Gas) in den leeren Raum strömt, ist also nur von der Temperatur, und nicht von der Dichtigkeit (Barometerstand) abhängig.

364.

Strömt die in einem Behälter (Blasbalg etc.) verdichtete atmosphärische Luft, statt in den leeren, in einen mit Luft erfüllten Raum (Atmosphäre) von geringerer Spannung aus, so kann man annehmen, die Ausflussöffnung sei untergetaucht

(§ 341). Um nun die Geschwindigkeit v zu bestimmen, mit welcher die comprimirte Luft von stets gleich bleibender Dichtigkeit ausströmt, sei, auf Fussmaass reducirt, der Barometerstand in der äussern Luft $=$ B und in der comprimirten Luft $=$ B $+ b$, so dass also der Unterschied der Spannungen einer Quecksilbersäule von b Fuss Höhe das Gleichgewicht hält, und es kommt nur noch darauf an, die Höhe der Luftsäule zu finden, welche mit dieser Quecksilbersäule im Gleichgewicht ist und die Dichtigkeit der comprimirten Luft hat. Bei 0^0 Temperatur und $28'' = 2\frac{1}{3}'$ Barometerstand ist die Höhe der Luftsäule, welche der Quecksilbersäule das Gleichgewicht hält $= 10560.b$ Fuss, und bei t Grad Wärme $= 10560.b(1+0{,}004\,t)$. Würde diese Luft m mal dichter, so brauchte die Luftsäule auch nur $\frac{1}{m}$ so hoch zu sein. Da sich nun die Dichtigkeiten der atmosphärischen Luft bei gleicher Temperatur, wie die Drücke (Barometerstände) verhalten, und die ausfliessende comprimirte Luft $\frac{B+b}{B}$ mal so dicht, als die äussere Luft ist, so ist die hier fragliche Druckhöhe $= 10560\,.\,b(1+0{,}004\,t).\frac{B}{B+b}$ und mithin für $B = 28'' = 2\frac{1}{3}'$, also $\sqrt{2g\,.\,10560\,.\,2\frac{1}{3}} = 1241$ die Ausflussgeschwindigkeit:

$$v = 1241\,k\sqrt{\frac{b}{B+b}(1+0{,}004\,t)}$$

wo nun b und B in Fuss, Zoll oder Linien ausgedrückt werden können, für B aber immer der mittlere Barometerstand von $28'' = 2\frac{1}{3}'$ zu nehmen ist.

Beispiel. Es sei $B = 28''$, $b = 2''$, $t = 10^0$, $k = 1$, dann ist $v = 327'$.

Anmerkung. Diese Formel stimmt mit der Erfahrung nur dann überein, wenn der Druck der innern Luft den der äussern nur höchstens um den 5ten Theil desselben übertrifft.

365.

Befindet sich, statt atmosphärischer Luft, ein anderes comprimirtes Gas (z. B. Leuchtgas) in dem Behälter, und ist die Dichtigkeit desselben bei 0^0 Temperatur und $28''$ Barometerstand $= d$, indem wir die der atmosphärischen Luft $= 1'$ annehmen, so ist das Quecksilber $\frac{10560}{d}$ mal so dicht, und man

muss also diese Zahl statt 10560 setzen, und dann ist, den Quadratinhalt der kleinen Ausflussöffnung $= a$ und die Ausflussmenge in Einer Secunde $=$ M gesetzt:

$$v = 1241\,k \sqrt{\frac{b}{B+b} \cdot \frac{1+0{,}004\,t}{d}} \ldots\ldots (1)$$

$$M = 1241\,ka \sqrt{\frac{b}{B+b} \cdot \frac{1+0{,}004\,t}{d}} \ldots\ldots (2)$$

$$a = \frac{M}{1241\,k} \cdot \sqrt{\frac{B+b}{b} \cdot \frac{d}{1+0{,}004\,t}} \ldots\ldots (3)$$

Beispiel. Für $B = 28''$, $b = 0'',2$, $t = 15^0$, $d = 0{,}56$, $k = 0{,}65$ und $a = 0{,}1\,\Box'$ ist $M = 9{,}3$ Φ'.

366.

Was nun schliesslich die Bewegung eines festen Körpers in der Luft, d. h. den Stoss (Widerstand) der Luft auf den festen Körper und umgekehrt betrifft, so gelten hier ganz dieselben Formeln, wie beim Stosse des Wassers.

Nur die Bemerkung ist noch hinzuzufügen, dass, möge der Körper gegen die Luft oder die Luft gegen den Körper stossen, dieselbe nicht, wie das Wasser, gleich zur Seite ausweicht, sondern erst eine von der Geschwindigkeit abhängige Compression erleidet, weshalb das Gewicht eines Cubikfuss Luft auch grösser, als beim ruhenden Zustand genommen werden muss. Ist bei einem bestimmten Barometer- und Thermometerstand das Gewicht von einem Cubikfuss Luft $= \gamma$, die Geschwindigkeit, mit welcher diese Luft in den l e e r e n Raum strömen würde, $= v$, und die Geschwindigkeit des in der ruhigen Luft sich bewegenden Körpers $= c$, so nimmt man auf's Gerathewohl an, dass die Luft im Verhältniss von c zu v dichter wird, und folglich $\left(1 + \frac{c}{v}\right) \gamma$ statt γ zu nehmen ist. Wäre z. B. $c = v$, so müsste 2γ statt γ, und wenn $c = \frac{1}{100} v$ ist, $(1 + 0{,}01)\, \gamma$ statt γ gesetzt werden. In folgenden Beispielen werden wir jedoch, der kürzeren Rechnung halber, immer $2\frac{3}{5}$ Loth $= 0{,}08$ ℔. statt γ setzen.

367.

Aufgabe. Ein Dampfwagen von $a = 40\,\Box'$ Vorderfläche

bewegt sich in ruhiger Luft mit $c = 25'$ Geschwindigkeit. Welchen beständigen Luftwiderstand, P, hat er zu überwinden?

Auflösung. Zufolge § 357 (1) ist:

$$P = \frac{k a \gamma c^2}{2g}$$

mithin, da hier $k = 1{,}39$, $\gamma = 0{,}08$: $P = 44$ ℔.

Zusatz 1. Strömt dieselbe Luft mit 25′ Geschwindigkeit normal gegen ein ebenes dichtes Segel von 40□′, so ist [weil dann $k = 1{,}86$ (§ 358, Zusatz)] $P = 59$ ℔.

Zusatz 2. Fährt der erwähnte Dampfwagen, von $a = 40$□′ Vorderfläche, diesem Lnftstrom, von 25′ Geschwindigkeit, mit 25′ Geschwindigkeit gerade entgegen, so ist [§ 358 (3)], indem wir hier $k = 1{,}4$ nehmen können: $P = 179$ ℔.

***Zusatz 3.** Trifft der Luftstrom in Zusatz 1 das Segel unter einem Winkel, $\alpha = 60^0$, so folgt aus $P = \frac{k a \gamma c^2 \sin\alpha}{2g}$ (§ 354), dass $P = 51$ ℔.

368.

Aufgabe. Für die krumme Fläche eines Fallschirms sei eine gleichwirkende ebene horizontale Fläche von $a = 625$□′ substituirt und an diese ein Gewicht, $P = 160$ ℔, befestigt. Welche Endgeschwindigkeit, c, wird dieser Schirm, in der Luft frei fallend, erreichen? (Fräulein Garnerin gebrauchte einen Fallschirm von 25 bis 30 Fuss Durchmesser.)

Auflösung. Nehmen wir hier $k = 1{,}25$ und $\gamma = 0{,}08$ ℔, so ist (§ 359) $c = 13'$, also nahe die Geschwindigkeit, die Jemand erreicht, der von einem $2\frac{1}{2}'$ hohen Tisch herunterspringt [§ 223 (5)].

Druck der Hofbuchdruckerei (H. A. Pierer) in Altenburg.